III. СПЕКТРАЛЕН АНАЛИЗ И СИНТЕЗ НА НЕПРЕКЪСНАТИ ПЕРИОДИЧНИ СИГНАЛИ

1. Теоретична постановка

Периодичен непрекъснат сигнал може да се представи като безкрайна сума от *хармонични компоненти*, или накратко *хармоници*, съгласно формула (3.1), известна още като ред на Фурие.

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\varpi t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\varpi t) \,, \tag{3.1}$$

където a_0 се нарича *постоянна съставна* или още – *средна стойност на сигнала*, a_n са амплитудите на косинусоидалните съставки, а b_n – амплитудите на синусоидалните съставки.

Коефициентите в реда на Фурие се изчисляват съгласно формули (3.2) – (3.4).

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)dt \tag{3.2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(n\varpi t)dt \tag{3.3}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\sin(n\varpi t)dt \tag{3.4}$$

В комплексна форма редът на Фурие има вида (3.5).

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\varpi t} \tag{3.5}$$

Комплексният коефициент C_n, пресмятан по формула (3.6), служи за определяне на спектъра на сигнала. Модулът на C_n е амплитудния спектър, а неговият ъгъл – фазовия спектър.

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \,. \tag{3.6}$$

2. Задачи за изпълнение

Задача 1.

а) Изчислете коефициентите в реда на Фурие за сигнала, зададен с уравнение (3.7).

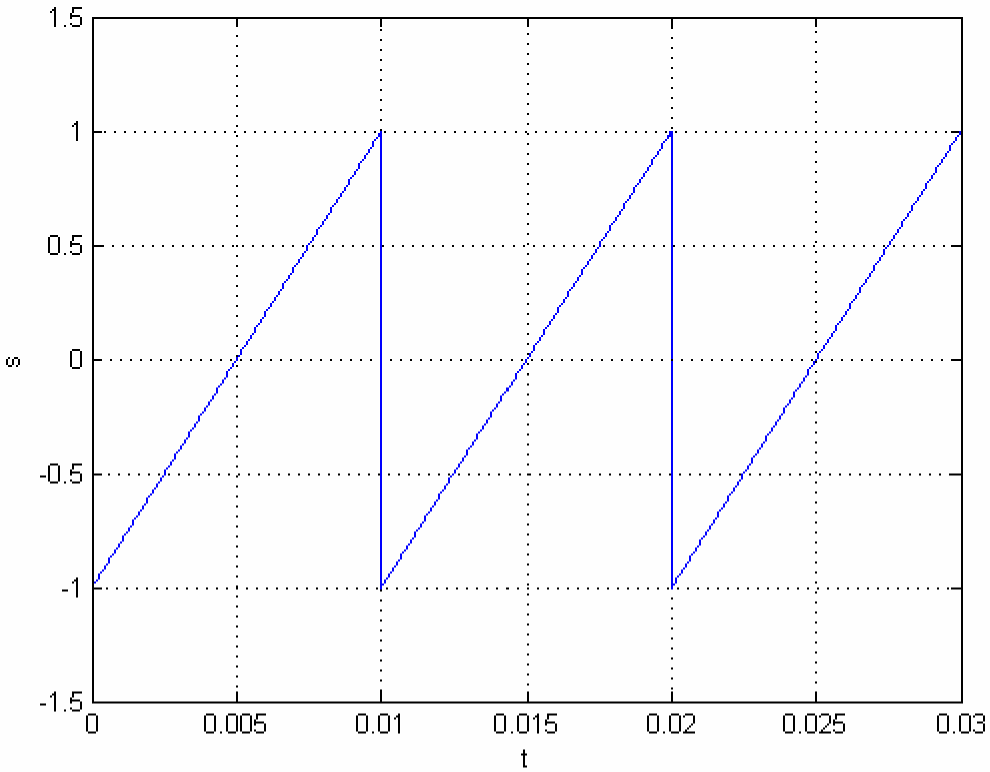
$$s(t) = 12\sin(\varpi t) + 6\sin(2\varpi t) + 3\sin(4\varpi t) \tag{3.7}$$

б) Използвайте получените коефициенти за да начертаете спектъра на сигнала.

в) С помощта на формула (3.1) синтезирайте сигнала като функция на времето.

Задача 2.

а) Изчислете коефициентите в реда на Фурие за сигнала, показан на фигура 3.1.



Фиг. 3.1

б) Използвайте получените коефициенти за да начертаете спектъра на сигнала.

в) С помощта на формула (3.1) синтезирайте сигнала като функция на времето. Изследвайте промяната на формата на сигнала при различен брой хармоници.

3. Методически указания

Задача 1.

Въведете сигнала в командния ред на Matlab:

```
syms t;
f = 100;
w = 2*pi*f;
T = 1/f;
s = 12*sin(w*t)+6*sin(2*w*t)+3*sin(4*w*t);
```

Изчислете коефициента a_0:

```
a0 = (1/T)*int(s,t,-T/2,T/2)
```

Напишете скрипт със следното съдържание за пресмятане на коефициентите a_n и b_n:

```
a=zeros(1,8);
```

```
b=zeros(1,8);

for n=1:8
      a(n) = (2/T)*int(s*cos(n*w*t),t,-T/2,T/2);
      b(n) = (2/T)*int(s*sin(n*w*t),t,-T/2,T/2);
end
```

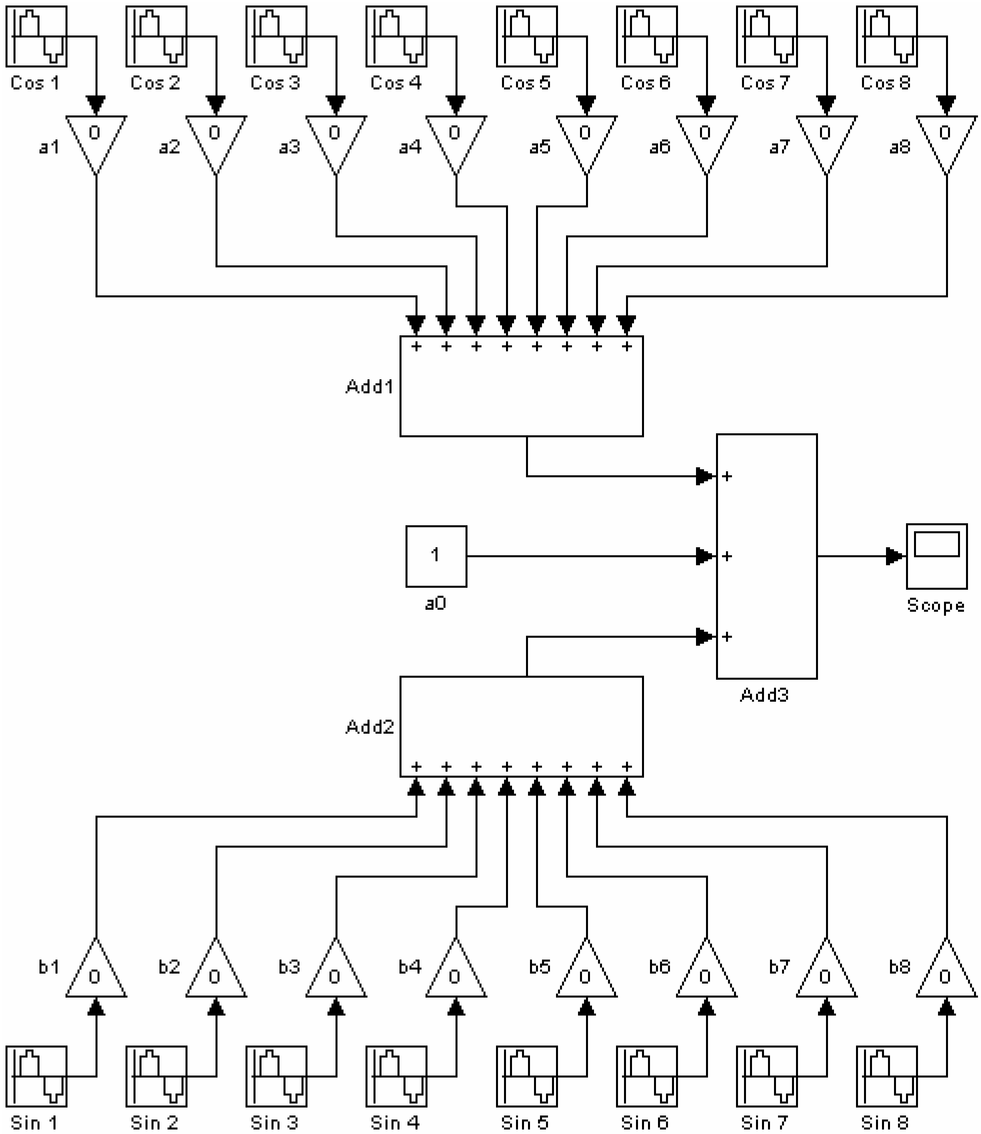
Изчислете комплексния коефициент в реда на Фурие:

```
C = (a-j*b)/2;
```

Изчислете и изчертайте амплитудния и фазовия спектри на сигнала:

```
mag = abs(C); stem(mag)
phase = angle(C); stem(phase)
```

Въведете в Simulink блоковата схема от фиг. 3.2 и задайте получените коефициенти.



Фиг. 3.2

Задача 2.

Намерете уравнението на сигнала от фиг. 3.1:

$$\begin{gathered} s = at + b \\ \left| \begin{aligned} 1 &= aT + b \\ -1 &= a0 + b \end{aligned} \right. \\ a = \frac{2}{T} \\ b = -1 \\ s = \frac{2t}{T} - 1 \end{gathered} \quad . \tag{3.8}$$

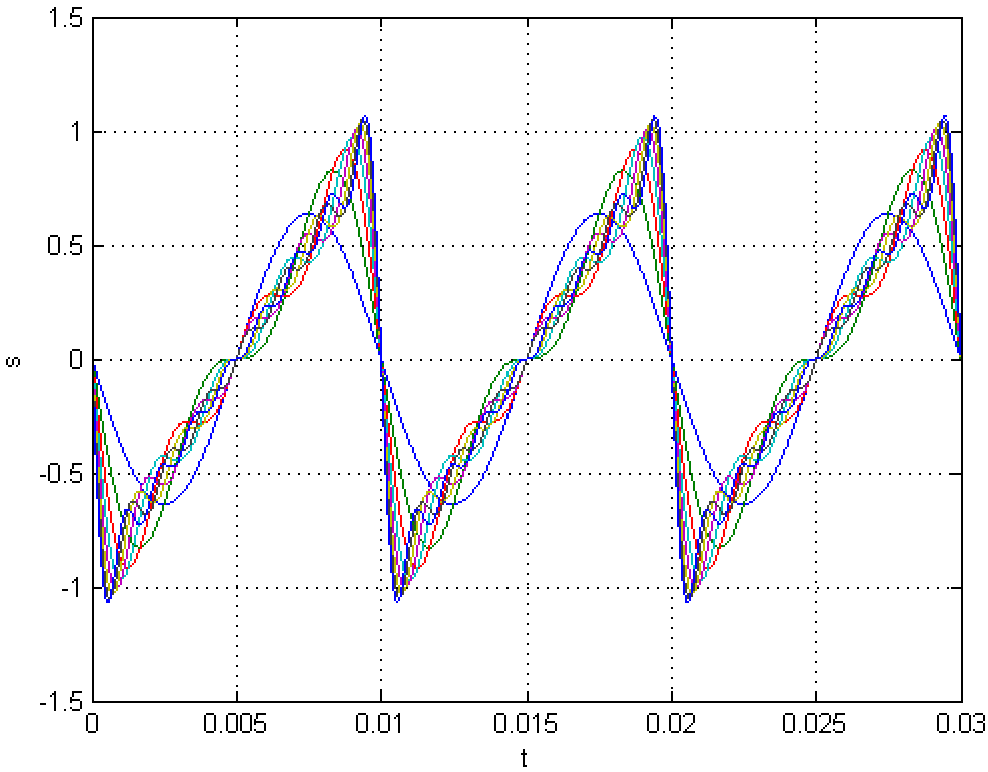
Замествайки получения израз за $s(t)$ във формули (3.2) – (3.4), изчислете коефициентите a_0, a_n и b_n:

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{2t}{T} - 1\right)dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^T \frac{2t}{T}dt - \int_0^T dt\right] = \frac{1}{T}\left[\frac{2}{T}\int_0^T tdt - t\Big|_0^T\right] = \\ = \frac{1}{T}\left[\frac{2}{T}\frac{t^2}{2}\Big|_0^T - T\right] = \frac{1}{T}\left[\frac{2}{T}\frac{T^2}{2} - T\right] = \frac{1}{T}\left[T - T\right] = 0 \end{gathered} \tag{3.9}$$

$$\begin{gathered} a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(n\varpi t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T \left(\frac{2t}{T} - 1\right)\cos(n\varpi t)dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^T \frac{2t}{T}\cos(n\varpi t)dt - \int_0^T \cos(n\varpi t)dt\right] = \\ = \frac{2}{n\varpi T}\left[\frac{2}{T}\int_0^T t\cos(n\varpi t)d(n\varpi t) - \int_0^T \cos(n\varpi t)d(n\varpi t)\right] = \frac{2}{n\varpi T}\left[\frac{2}{T}\int_0^T t\cos(n\varpi t)d(n\varpi t) - \sin(n\varpi t)\Big|_0^T\right] = \\ = \frac{2}{n\varpi T}\left[\frac{2}{T}\int_0^T t\cos(n\varpi t)d(n\varpi t) - (\sin(n2\pi) - \sin(0))\right] = \frac{2}{n\varpi T}\left[\frac{2}{T}\int_0^T t\cos(n\varpi t)d(n\varpi t)\right] = \frac{2}{n\pi T}\int_0^T t\cos(n\varpi t)d(n\varpi t) = \\ = \frac{2}{n\pi T}\int_0^T td\sin(n\varpi t) = \frac{2}{n\pi T}\left[t\sin(n\varpi t)\Big|_0^T - \int_0^T \sin(n\varpi t)dt\right] = \frac{2}{n\pi T}\left[T\sin(n\varpi T) - T\sin(0) - \int_0^T \sin(n\varpi t)dt\right] = \\ = \frac{2}{n\pi T}\left[T\sin(n2\pi) - T\sin(0) - \int_0^T \sin(n\varpi t)dt\right] = -\frac{2}{n\pi T}\int_0^T \sin(n\varpi t)dt = \frac{1}{(n\pi)^2}\int_0^T \sin(n\varpi t)d(n\varpi t) = \\ \frac{1}{(n\pi)^2}\cos(n\varpi t)\Big|_0^T = \frac{1}{(n\pi)^2}\left[\cos(n\varpi T) - \cos(0)\right] = \frac{1}{(n\pi)^2}\left[\cos(n2\pi) - \cos(0)\right] = \frac{1}{(n\pi)^2}\left[1 - 1\right] = 0 \end{gathered} \tag{3.10}$$

$$\begin{gathered} b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(n\varpi t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T \left(\frac{2t}{T} - 1\right)\sin(n\varpi t)dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^T \frac{2t}{T}\sin(n\varpi t)dt - \int_0^T \sin(n\varpi t)dt\right] = \\ = \frac{2}{n\varpi T}\left[\frac{2}{T}\int_0^T t\sin(n\varpi t)d(n\varpi t) - \int_0^T \sin(n\varpi t)d(n\varpi t)\right] = \frac{2}{n\varpi T}\left[\frac{2}{T}\int_0^T t\sin(n\varpi t)d(n\varpi t) + \cos(n\varpi t)\Big|_0^T\right] = \\ = \frac{2}{n\varpi T}\left[\frac{2}{T}\int_0^T t\sin(n\varpi t)d(n\varpi t) + \cos(n\varpi T) - \cos(0)\right] = \frac{2}{n\varpi T}\left[\frac{2}{T}\int_0^T t\sin(n\varpi t)d(n\varpi t) + \cos(n2\pi) - \cos(0)\right] = \\ = \frac{2}{n\pi T}\int_0^T t\sin(n\varpi t)d(n\varpi t) = -\frac{2}{n\pi T}\int_0^T td\cos(n\varpi t) = -\frac{2}{n\pi T}\left[t\cos(n\varpi t)\Big|_0^T - \int_0^T \cos(n\varpi t)dt\right] = \\ = -\frac{2}{n\pi T}\left[T\cos(n2\pi) - \frac{1}{n\varpi}\int_0^T \cos(n\varpi t)d(n\varpi t)\right] = -\frac{2}{n\pi T}\left[T - \frac{T}{n2\pi}\sin(n\varpi t)\Big|_0^T\right] = \\ = -\frac{2}{n\pi}\left[1 - \frac{1}{n2\pi}(\sin(n\varpi T) - \sin(0))\right] = -\frac{2}{n\pi}\left[1 - \frac{1}{n2\pi}(\sin(n2\pi) - \sin(0))\right] = -\frac{2}{n\pi}\left[1 - \frac{1}{n2\pi}(0 - 0)\right] = -\frac{2}{n\pi} \end{gathered} \tag{3.11}$$

Въведете получените коефициенти в блоковата схема от фиг. 3.2.



Фиг. 3.3

Промяната на броя на отчетените коефициенти ще доведе до промяна във формата на сигнала, както е показано на фигура 3.3.

4. Съдържание на протокола

1. Теоретична част
2. Задачи за изпълнение
3. Изводи

5. Контролни въпроси и задачи за самостоятелна работа

Въпрос 1. Какво представлява реда на Фурие?
Въпрос 2. Каква е разликата между сигнал с ограничен и сигнал с неограничен спектър?
Въпрос 3. Кога считаме, че изкривяванията, настъпили в следствие на непропуснати през канала за връзка хармоници, са пренебрежимо малки?

Задача 1. Разложете сигнал с триъгълна форма в ред на Фурие и на база на получените коефициенти синтезирайте обратно сигнала като функция на времето, като променяте броя на отчетените коефициенти.
Задача 2. Синтезирайте сигнал, за който $a_2 = 3$, $a_5 = 7$ и $b_4 = 5$.