Summaries

of the research papers related to the competition of Chief Assistant Dr. Diana Kirilova Nedelcheva.

Group [A] Set optimization

In the last few years there has been a growing interest in set optimization. One of the reasons why this theory experienced such a tremendous growth is probably because it turned out that many problems arising from a variety of fields such as medical engineering, finance or economics lead to optimization problems which are genuinely set-valued. Set optimization may also naturally arise from problems in academic disciplines that are not closely related to mathematics, such as social sciences. For instance, in social choice theory, individual preferences over alternatives are described through models involving binary relations called preferences relations.

Papers group [A]

1. **M.H. Geoffroy, Y. Marcelin, D.K. Nedelcheva: Convergence of relaxed minimizers in set optimization, Optimization Letters 2017, 11(8):1677-1690. DOI: 10.1007/s11590-016-1079-4 (IF 1.013) Q2**

2. **M. Gaydu, M.H. Geoffroy, C. Jean-Alexis, D.K. Nedelcheva: Stability of minimizers of set optimization problems, Positivity 2017, 21(1):127-141. DOI: 10.1007/s11117-016-0412-6 (IF 0.92) Q2**

3. **D. Kamburova and D.K. Nedelcheva: "Variational Principles for supinf Problems with Constraints Geometry, Integrability and Quantization, 2020, pp 163-169. DOI: 10.7546/giq-21-2020-163-169**

[M.H. Geoffroy, Y. Marcelin, D.K. Nedelcheva: Convergence of relaxed minimizers in set optimization, Optimization Letters 2017, 11(8):1677-1690. DOI: 10.1007/s11590-016-1079-4 (IF 1.013) Q2]. In this paper we investigate, in a unified way, the stability of several relaxed minimizers of set optimization problems. We introduce a topology on vector ordered spaces from which we derive a concept of convergence that allows us to study both the upper and the lower stability of the sets of relaxed minimizers we consider.

Throughout, X is a general Banach space while Y is a Banach space ordered by a nonempty, closed, convex and pointed cone $C \subset Y$ through a binary relation $\leq$ defined by $y_1 \leq y_2$ if and only if $y_2 - y_1 \in C$.

We consider a set-valued mapping F, acting from X to the subsets of Y, indicated by $F : X \rightrightarrows Y$ the domain of which, denoted by $\operatorname{dom} F$, is nonempty. We recall that $\operatorname{dom} F = \{x \in X | F(x) \neq \emptyset\}$ while the notation $\operatorname{gph} F$ stands for the graph of F, i.e., the set of those pairs $(x,y) \in X \times Y$ such that $y \in F(x)$. We consider the following set optimization problem:

$$(\mathrm{P}) : \begin{cases} \text{minimize } F(x) \\ \text{subject to } x \in D; . \end{cases}$$

where the mapping F is the objective function of the problem (P) and the so-called feasible set D is a closed subset of $\operatorname{dom} F$. Solving this problem consists of finding all vectors $\bar{x} \in D$ for which there is a vector $\bar{y} \in F(\bar{x})$ such that $\bar{y}$ is a minimal point of $F(D)$. Such a pair $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F \cap (D \times Y)$ is then called a minimizer of the problem (P). In this paper, our purpose is to investigate the asymptotic behavior of sequences of minimization problems. More precisely, given a sequence of optimization problems (P_n), the data of which converge in some sense to the data of the set optimization problem (P), we study the convergence of the set of minimizers of (P_n) to the set of minimizers of (P). We work with a wide class of relaxed minimizers, called c−minimizers, and study their stability in general Banach spaces. The class of minimizers we consider together with the fact that we work in infinite-dimensional spaces allows us to extend many results established for scalar and vector optimization.

[M. Gaydu, M.H. Geoffroy, C. Jean-Alexis, D.K. Nedelcheva: Stability of minimizers of set optimization problems, Positivity 2017, 21(1):127-141. DOI: 10.1007/s11117-016-0412-6 (IF 0.92) Q2]. We study the asymptotic behavior of sequences of minimization problems in set optimization. More precisely, considering a sequence of set optimization problems (Pn) converging in some sense to a set optimization problem (P), we investigate the upper and lower convergences of the sets of minimizers of the problems (Pn) to the set of minimizers of the problem (P).

The description of asymptotic behavior of families of minimization (or maximization) problems is a popular topic in optimization. It finds its motivation in many mathematical problems, may they come from industrial applications, economic modeling or, of course, abstract mathematical questions. In several situations it is convenient to substitute the study of the asymptotic behavior of a family of optimization problems with the study of a so-called "limit problem". Naturally, this limit problem must capture the main behavior of the minimizers (or the maximizers) of the family of problems being dealt with and its solutions need to be more easily obtained. Conversely, given a set optimization problem for which the solutions are difficult to characterize it maybe helpful to find approximate problems of the original one, the solutions of which are easier to handle.

In this work, we consider the following set optimization problem:

$$(\mathrm{P}) : \begin{cases} \text{minimize } F(x) \\ \text{subject to } x \in D; . \end{cases}$$

where the mapping F is the objective function of the problem (P) and the set D is a closed subset of $\operatorname{dom} F$ called the feasible set. Solving this problem consists of finding all vectors $\bar{x}$ in the feasible set D for which there is a vector $\bar{y} \in F(\bar{x})$ such that $\bar{y}$ is a minimal point of $F(D)$. In literature, many papers dealing with the stability of minimizers in vector optimization focus on both Pareto and weak minimizers. Nevertheless, to be able to work with weak minimizers we need the ordering cone C to be solid, i.e., to have a nonempty interior; this assumption seems somewhat restrictive since many natural ordering cones in the infinite dimensional setting do not fulfill this condition while, even in finite dimensions, several vector optimization problems happen to be modeled using nonsolid ordering cones. Taking this situation into consideration, we chose to take a different approach by considering another concept of relaxed minimizers, namely,the relative minimizers. Relative minimizers are defined similarly to weak minimizers except that the interior of the cone C is replaced with its relative interior, a less restrictive concept.

We consider the following sequence of set optimization problems (Pn) given by

$$(P_n) : \begin{cases} \text{minimize } F_n(x) \\ \text{subject to } x \in D_n; . \end{cases}$$

where we assume that, for all $n \in \mathbb{N}$, $F_n : X \rightrightarrows Y$, $\operatorname{dom} F_n \neq \emptyset$ and D_n is a nonempty and closed subset of $\operatorname{dom} F_n$. In this paper we introduce and discuss the two notions of convergence of set- optimization problems we will use to establish our stability results, namely, the Painleve-Kuratowski-like convergence (PKL-convergence for short) and the $\Gamma-$convergence. We begin by investigating the upper convergence of both relative and strong minimizers; more precisely, we show that if a sequence of set -optimization problems (P_n) PKL-converges to the problem (P)then any cluster point of a sequence of suitable approximate relative minimizers (respectively, approximate strong minimizers) of the problems (P_n) is a relative minimizer (respectively, a strong minimizer) of the problem (P). Afterwards, we study the lower stability of minimizers of the problem (P). We show that any relative minimizer of (P) can be approximated by a sequence of approximate minimizers of the problems (P_n) whenever the sequence of problems (P_n) $\Gamma - converges$ to the problem (P).

[D. Kamburova and D.K. Nedelcheva: "Variational Principles for supinf Problems with Constraints Geometry, Integrability and Quantization, 2020, pp 163-169. DOI: 10.7546/giq-21-2020-163-169] Variational principles are a group of results that concern sufficient conditions under which after a perturbation of a lower semicontinuous function, bounded from below, by a function with an arbitrary small norm, the perturbed minimization problem has a solution. In this paper the following supinf problem with constraints is considered:

$$(P) \qquad \sup_{x \in X, y \in Kx} \inf f(x,y)$$

where X and Y are completely regular topological spaces, $K : X \rightrightarrows Y$ is a set- valued mapping and $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ is an extended real-valued function.

First some preliminaries are presented followed by a recent result [Gaumont D., Kamburova D., Revalski J. P., Perturbations of Supinf Problems with Constraints, Vietnam J. Math. 47 (2019) 659–667] which considers a variational principle for the problem (P). The last section is devoted to Stackelberg problem and finding sufficient conditions that ensure validity of the presented results in case of Stackelberg problem.

Group [B] Fixed point theorems and applications

Fixed point theory is an object of active research with a wide range of applications in various fields. It includes results which state that under certain conditions a self map f on a set X admits one or more fixed points, i.e., there exists a point $x \in X$ such that $f(x) = x$. In 1922, a theorem which concerns the existence and uniqueness of a fixed point in a complete metric space was formulated and proved by the Polish mathematician Stefan Banach. His result is known under the name of Banach's fixed point theorem or the Banach contraction principle. Using the term Hausdorff metric, in 1969, Nadler introduced the notion of set-valued contractions and proved a set-valued version of the Banach contraction principle. Since then many mathematicians have worked tirelessly in this area and a number of generalizations of Nadler's contraction principle have appeared.

Papers group [B]

1. **D. Nedelcheva, R. Marinov: "Fixed point theory monograph, University Publishing House at the Technical University - Varna, ISBN 978-954-20-0818-7**

2. **D. K. Nedelcheva: "Altering Points in Partial Metric Space Geometry, Integrability and Quantization, 2020, pp 221-231. DOI: 10.7546/giq-21-2020-221-231**

3. **M. Hristov , A. Ilchev , D. Nedelcheva B. Zlatanov: "Existence of Coupled Best Proximity Points of p-Cyclic Contractions Axioms 2021, 10(1), 39; doi.org/10.3390/axioms10010039**

4. **G. Gecheva, D. Nedelcheva, M. Ruseva and B. Zlatanov: "Applications of Coupled Fixed Points for Multivalued Maps in the Equilibrium in Duopoly Markets and in Aquatic Ecosystems Axioms 2021, 10(2), 44; doi.org/10.3390/axioms10020044**

5. **D. Nedelcheva: "Methods for solving generalized equations book, University Publishing House at the Technical University - Varna, ISBN 978-954-20-0819-4**

[D. Nedelcheva, R. Marinov: "Fixed point theory monograph, University Publishing House at the Technical University - Varna, ISBN 978-954-20-0818-7]. The aim of this monograph is to provide an up-to-date overview of the problems concerning fixed point theory, prove some double fixed point theorems for contraction set - valued operators, and some single-valued results. The chapters are devoted to the contemporary research and development of the fixed point theory. This monograph contains mainly original research by the authors. It may be of particular interest for a wide range of mathematicians whose area of expertise is the fixed point theory.

The monograph consists of three chapters. Chapter 1 “Fixed points in metric spaces” gives some historical background of the main problems presented in the monograph. It also gives some basic definitions and well known results. The detailed proofs of the Banach Fixed point theorem and Dontchev - Hagger’s Fixed point theorem can be found here, too. It discusses the general convergence methods in the setting of a metric space and studies the existence of a solution of generalized equations with the help of the fixed point theorems in metric spaces.

Chapter 2 “Fixed points in cone metric spaces” gives some basic definitions and well known results in cone metric spaces. This chapter discusses the existence and the uniqueness of the fixed points for a composition of two set - valued mappings in cone metric spaces. More precisely, we consider the fixed point theorem for $\alpha - \psi -$ contraction set - valued mappings in cone metric spaces, proved by Kutbi and Situnavarat and prove an extension of their result for a composition of two set - valued mappings, using $\alpha - \beta - \psi - e -$ contraction set - valued mappings. We prove the uniqueness of the fixed point in the single valued case under an additional assumption, too. Moreover, we study the existence and the location of coupled fixed points and common fixed points for these types of mappings.

In Chapter 3 “Fixed points in partial metric spaces” we establish several fixed point theorems, which generalize and complement some already known results. We prove the existence of an altering point for two set - valued mappings in complete partial metric spaces. Moreover, we study the existence and the location of coupled fixed points for a composition of two pseudo-contractive-type set-valued mappings in the setting of partial metric spaces by using Bianchini-Grundolfi gauge functions. We prove the existence of a solution of the generalized coupled fixed point problem in partial metric spaces.

[D. K. Nedelcheva: "Altering Points in Partial Metric Space Geometry, Integrability and Quantization, 2020, pp 221-231. DOI: 10.7546/giq-21-2020-221-231]. A partial metric space, which was introduced in 1992, is a generalization of the notion of metric space such that the distance of a point from itself is not necessarily zero. Later, many scientists worked on fixed point theorems for set-valued mappings on partial metric spaces.

This paper elaborates on a composition of two set-valued mappings in partial metric spaces. Let (X,p) and (Y,σ) be two partial metric spaces. Let $F : X \rightrightarrows Y$ and $G : Y \rightrightarrows X$ be two multi-valued operators. The problem is to find $(x^*,y^*) \in X \times Y$ such that:

$$\begin{cases} x^* \in G(y^*) \\ y^* \in F(x^*). \end{cases}$$

Then, (x^*,y^*) is called altering point of F and G. In this paper we prove the existence of an altering point for two set - valued mappings in complete partial metric spaces.

[M. Hristov , A. Ilchev , D. Nedelcheva B. Zlatanov: "Existence of Coupled Best Proximity Points of p-Cyclic Contractions Axioms 2021, 10(1), 39; doi.org/10.3390/axioms10010039]. It turns out that there is a great interest on coupled fixed points the last years, both in fundamental results and their applications. We generalize the notion of coupled fixed (or best proximity) points for cyclic ordered pairs of maps to p–cyclic ordered pairs of maps.

A notion that generalizes fixed point results for non-self maps is that of cyclic maps, i.e., $T : A \to B$, $T : B \to A$. Sometimes the classical equation $x = Tx$ may not posses a solution, and thus fixed points results could not be applied. We can alter the problem $x = Tx$ to the optimization problem $\min\{\|x-Tx\|\}$. It is already known that x is called a best proximity points of T in A if $\|x-Tx\| = \operatorname{dist}(A,B) = \inf\{\|a-b\| : a \in A, b \in B\}$. The notion of best proximity points actually generalizes the notion of cyclic maps, as far as if $A \cap B \neq \emptyset$, then any best proximity point is a fixed point, too.

We have tried to unify already existing techniques to get results for the existence and uniqueness of coupled fixed (or best proximity) points for p–cyclic maps. More precisely, we find sufficient conditions for the existence and uniqueness of the coupled fixed (or best proximity) points. It turns out that best proximity points are interesting not only as a pure mathematical results, but also as a possibility for a new approach in solving of different types of problems. We mention a new kind of applications in the theory of equilibrium in duopoly markets. We illustrate the results with an example that covers a wide class of maps.

[G. Gecheva, D. Nedelcheva, M. Ruseva and B. Zlatanov: "Applications of Coupled Fixed Points for Multivalued Maps in the Equilibrium in Duopoly Markets and in Aquatic Ecosystems Axioms 2021, 10(2), 44; doi.org/10.3390/axioms10020044]. In the late twentieth century Dontchev and Hager successfully presented an extension of Nadler's fixed point result for set - valued mappings. They determined the location of a fixed point with respect to an initial value of the set–valued mapping. Their conclusion was obtained under two modified conditions and it has been playing an important role in the development of the metric fixed point theory. One kind of a generalization of this result is the notation of coupled fixed points. We have obtained a new class of ordered pairs of multivalued maps that have pairs of coupled fixed points. More precisely, we consider two set–valued maps $F_1 : X \times Y \rightrightarrows X$ and $F_2 : X \times Y \rightrightarrows Y$, where (X, ρ) and (Y, σ) are complete metric spaces. We prove the existence of at leased one ordered pair (x, y), such that $x \in F_1(x, y)$ and $y \in F_2(x, y)$, which is call generalized coupled fixed point for the ordered pair of set–valued maps (F_1, F_2). We illustrate the main result with two examples, that cover wide range of models. We apply the main result in models in duopoly markets to get an existence of market equilibrium and in aquatic ecosystems to get equilibrium too.

[D. Nedelcheva: "Methods for solving generalized equations book, University Publishing House at the Technical University - Varna, ISBN 978-954-20-0819-4]. There are practical applications of fixed point theory to generalized equations, to systems of nonlinear variational inequalities, to systems of hierarchical variational inequalities, to game theory, and so on.

In this book we study the local convergence of three methods for solving generalized equations. Wide variety of variational problems such as linear and nonlinear complementarity problems, systems of nonlinear equations, first-order necessary conditions for nonlinear programming etc. can be solved by applying generalized equations serving as an abstract model. They are also widely used in engineering and economics.

In Chapter 1 "Basic definitions and results"we give some historical background of the main problems presented in the book. We also give some basic definitions and well known results.

In Chapter 2 "Newton type method involving point based approximation"we study the local convergence of the method

$$0 \in A(p, x_k, x_{k+1}) + F(x_{k+1}),$$

in order to find the solution of the generalized equation

$$\text{find} \quad x \in X \quad \text{such that} \quad 0 \in f(p, x) + F(x).$$

We show that this method is convergent to the value $s(p)$ of the Lipschitz continuous localization of the solution mapping , if the mapping

$$f(\bar{p}, \bar{x}) + \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})(\cdot - \bar{x}) + F(\cdot)$$

is strongly metrically regular at $\bar{x}$ for 0 with associated Lipschitz continuous single valued localization σ around 0 for $\bar{x}$ of the inverse

$$[f(\bar{p}, \bar{x}) + \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})(\cdot - \bar{x}) + F(\cdot)]^{-1},$$

f is Lipschitz continuous with respect to p uniformly with x, the function $A : P \times X \times X \to Y$ is (n, α) - point-based approximation of f and $\nabla_x f$ is Lipschitz continuous with respect to x uniformly with p.

In Chapter 3 "Method of Chords for solving parametric generalized equations"we study the local convergence of the chord method for solving nonsmooth generalized equations of the form:

$$\text{(1)} \qquad \text{find} \quad x \in X \quad \text{such that} \quad y \in f(x) + F(x),$$

where f is a function and F is a set-valued map acting from a Banach space X to the linear normed space Y.

We study the local convergence of the method

$$\text{(3)} \qquad y \in f(x_k) + A(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}),$$

if the set-valued map

$$[f(x^*) + \nabla f(x^*)(\cdot - x^*) + F(\cdot)]^{-1}$$

is Aubin continuous at $(0, x^*)$ with a constant M for growth, $f : X \to Y$ is a function, whose Fréchet derivative is $L-$Lipschitz and $A \in L(X, Y)$ is such that $2M\|\nabla f(x^*) - A\| < 1$. Let us specify that when $A = \nabla f(x_0)$ and $y = 0$ the method (3) reduces to the well-known modified Newton method

$$0 \in f(x_k) + \nabla f(x_0)(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}).$$

The main advantage of the method (3) seems to be the fact that one does not need to calculate the derivative of the function f which in some cases might be quite involved computationally.

In Chapter 4 "Secant type method"we consider generalized equations of the form

$$0 \in f(p, x) + g(p, x) + F(x) \tag{1}$$

is a subject of our research. We consider the method

$$0 \in f(p, x_k) + g(p, x_k) + (\nabla_x f(p, x_k) + [p, x_{k-1}, x_k; g])(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}) \tag{2}$$

where $f : P \times X \to Y$ is differentiable in a neighborhood of a solution $(\bar{p}, \bar{x})$ of (2) and $g : P \times X \to Y$ is differentiable at $(\bar{p}, \bar{x})$ but may be not differentiable in a neighborhood of $(\bar{p}, \bar{x})$. We show that this method is convergent to the value $s(p)$ of the Lipschitz continuous localization of the solution mapping , if the mapping

$$f(\bar{p}, \bar{x}) + g(\bar{p}, x) + \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})(x - \bar{x}) + F(x)$$

is strongly metrically regular at $\bar{x}$ for 0 where $(\bar{p}, \bar{x})$ is solution of (2) with associated Lipschitz continuous single valued localization σ around 0 for $\bar{x}$ of the inverse

$$[f(\bar{p}, \bar{x}) + g(\bar{p}, x) + \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})(x - \bar{x}) + F(x)]^{-1},$$

f and g are Lipschitz continuous with respect to both variables in a neighborhood of the point $(\bar{p}, \bar{x})$, $\nabla_x f$ is Lipschitz continuous with respect to x uniformly in p, $4\,\mathrm{lip}(\sigma; 0).\widehat{\mathrm{lip}}_x(g; (\bar{p}, \bar{x})) < 1$, for the second order divided difference we assume $\|[p, x, y, z; g]\| \leq K, \quad K \in \mathbb{R}$.

We use method (3) and define an implicit mapping involving sequences of iterates as elements of a sequence space. This way we prove an implicit function theorem. Such theorems are commonly used in various parts of mathematics, including partial differential equations, nonsmooth analysis, and numerical analysis.

Резюмета

на свързаните с конкурса научни трудове на гл.ас.д-р Диана Кирилова Неделчева.

Група [А] Оптимизация на множества

През последните няколко години нараства интересът към оптимизацията на множества. Една от причините, поради които тази теория претърпява такова огромно развитие, вероятно е факта, че много задачи, произтичащи от различни области като инженерство в медицината, финанси или икономика, се свеждат до оптимизационни задачи, в които участват многозначни изображения. Оптимизацията на множества може също така естествено да възникват и в задачи на академични дисциплини, които не са тясно свързани с математиката, като социалните науки. Например в теорията за социалния избор индивидуалните предпочитания пред алтернативите се описват чрез модели, включващи бинарни релации, наречени релация на предпочитания.

Публикации от Група [А]

1. **M.H. Geoffroy, Y. Marcelin, D.K. Nedelcheva: Convergence of relaxed minimizers in set optimization, Optimization Letters 2017, 11(8):1677-1690. DOI: 10.1007/s11590-016-1079-4 (IF 1.013) Q2**

2. **M. Gaydu, M.H. Geoffroy, C. Jean-Alexis, D.K. Nedelcheva: Stability of minimizers of set optimization problems, Positivity 2017, 21(1):127-141. DOI: 10.1007/s11117-016-0412-6 (IF 0.92) Q2**

3. **D. Kamburova and D.K. Nedelcheva: "Variational Principles for supinf Problems with Constraints Geometry, Integrability and Quantization, 2020, pp 163-169. DOI: 10.7546/giq-21-2020-163-169**

[M.H. Geoffroy, Y. Marcelin, D.K. Nedelcheva: Convergence of relaxed minimizers in set optimization, Optimization Letters 2017, 11(8):1677-1690. DOI: 10.1007/s11590-016-1079-4 (IF 1.013) Q2]. В тази статия изследваме, по един унифициран начин, стабилността на някои точки на достигане на слаб минимум за многозначните оптимизационни задачи. Въвеждаме топология върху векторни наредени пространства и концепция за сходимост, която ни позволява да изследваме, както стабилност отгоре, така и стабилността отдолу на множеството от точки на достигане на слаб минимум.

Разглеждаме Банахово пространство X и Банахово пространство Y наредено от непразен, затворен, изпъкнал и заострен конус $C \subset Y$ посредством релацията $\leq$ дефинирана, чрез $y_1 \leq y_2$ тогава и само тогава, когато $y_2 - y_1 \in C$.

Разглеждаме многозначно изображение F, дефинирано върху X, със стойности подмножествата на Y, означено с $F : X \rightrightarrows Y$ с непразно дефиниционно ножество, означено с $\operatorname{dom} F$, като $\operatorname{dom} F = \{x \in X | F(x) \neq \emptyset\}$. Означението $\operatorname{gph} F$ използваме за графиката на многозначното изображение F, т.е. множеството от точки $(x, y) \in X \times Y$ такива, че $y \in F(x)$. Разглеждаме следната задача на оптимизацията на многозначни изображения:

$$(\mathrm{P}) : \begin{cases} \text{да се намерят точките, в които } F(x) \text{достига минимум} \\ \text{при условие, че } x \in D; \end{cases}$$

където F е целевата функция на задачата (P), а множеството D е затворено подмножество на $\operatorname{dom} F$. Решаването на тази задача се състои в намирането всички вектори $\bar{x} \in D$ за които съществува вектор $\bar{y} \in F(\bar{x})$ така, че $\bar{y}$ е точка на минимум за $F(D)$. Такава двойка $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F \cap (D \times Y)$ се нарича минимизатор на задача (P). В тази статия, нашата цел е да изследваме асимптотичното поведение на редиците от задачи за минимизиране. По-точно, разглеждаме редица от оптимизационни задачи (P_n), данните от които са сходящи в определен смисъл към данните на зададената оптимизационна задача (P). Изучаваме сходимостта на множеството от минимизатори на (P_n) към множеството от минимизатори на (P). Работим с широк клас слаби минимизатори, наречени c$-$ минимизатори, и изучаваме тяхната стабилност в Банахови пространства. Класът на минимизаторите, които разглеждаме заедно с фактът, че работим в безкрайномерни пространства, ни позволява да разширим много резултати, доказани в скаларната и векторна оптимизация.

[M. Gaydu, M.H. Geoffroy, C. Jean-Alexis, D.K. Nedelcheva: Stability of minimizers of set optimization problems, Positivity 2017, 21(1):127-141. DOI: 10.1007/s11117-016-0412-6 (IF 0.92) Q2].

Изучаваме асимптотичното поведение на редица от задачи за минимизиране на многозначни изображения. По-точно, разглеждайки редицата от оптимизационни задачи на множества (Pn), сходяща в някакъв смисъл към оптимизационната задача (P), ние изследваме горната и долната сходимост на множествата от минимизатори на задачите (Pn) към множеството от минимизатори на задачата (P).

Описанието на асимптотичното поведение на фамилии от задачи за минимизиране (или максимизиране) е популярна тема в оптимизацията. То намира своята мотивация в много математически задачи, които намират своето приложение в индустрията, моделирането в икономиката, както и в абстрактни математически въпроси. В някои ситуации е удобно да се замени изследването на асимптотичното поведение на фамилия оптимизационни задачи с изследване на така наречената „гранична задача“. Естествено, тази гранична задача трябва да обхване основното поведение на минимизаторите (или максимизаторите) на фамилията от разглеждани задачи. Освен това решенията на граничната задача трябва да се получават по-лесно. И обратно, като се има предвид зададена оптимизационна задача, чиито решения са трудни за характеризиране, може би е полезно да се намерят задачи, апроксимиращи оригиналната, чиито решения са по-лесни за работа.

В тази статия разглеждаме следната оптимизационна задача:

$$(\mathrm{P}) : \begin{cases} \text{да се намерят точките, в които } F(x) \text{достига минимум} \\ \text{при условие, че } x \in D; . \end{cases}$$

където изображението F е целевата функция на задачата (P) и множеството D е затворено подмножество на $\operatorname{dom} F$. Решаването на тази задача се състои в намирането на всички вектори $\bar{x}$ в D, за който има вектор $\bar{y} \in F(\bar{x})$ такъв, че $\bar{y}$ е точка на достигане на минимум за $F(D)$. В литературата много статии, посветени на изследването на стабилността на минимизаторите във векторна оптимизация, фокусират вниманието както върху Парето минимизаторите, така и върху слабите минимизатори.

Но, за да можем да работим със слаби минимизатори, трябва конусът на наредбата C да бъде твърд, т.е. да има непразна вътрешност; това предположение изглежда донякъде ограничаващо, тъй като много естествени конуси на наредба в безкрайномерни пространства не изпълняват това условие, докато дори при крайни размерности се случва да се моделира с векторни оптимизационни задачи с помощта на нетвърди нареждащи конуси. Вземайки предвид тази ситуация, ние избрахме да възприемем различен подход, като разгледахме друга концепция за отслабени минимизатори, а именно относителните минимизатори. Относителните минимизатори се дефинират подобно на слабите минимизатори, с тази разлика, че вътрешността на конуса C е заменена с относителната му вътрешност, която е по-малко ограничаваща концепция.

Разглеждаме редицата от оптимизационни задачи (Pn)

$$(P_n) : \begin{cases} \text{да се намерят точките, в които } F_n(x) \text{достига минимум} \\ \text{при условие, че } x \in D_n; . \end{cases}$$

където се предполага, че за всяко $n \in \mathbb{N}$, $F_n : X \rightrightarrows Y$, $\operatorname{dom} F_n \neq \emptyset$ и D_n е непразно, затворено подмножество на $\operatorname{dom} F_n$.

В тази статия ние въвеждаме и обсъждаме двете идеи за сходимост на задачите за оптимизация на множества, които използваме, за да установим нашите резултати, свързани със стабилността на процеса, а именно сходимост, подобна на Painleve-Kuratowski (PKL-сходимост) и $Gamma-$ сходимост. Започваме с изследване на сходимостта отгоре както на относителни, така и на силни минимизатори; по-точно показваме, че ако редицата от оптимизационни задачи с многозначни изображения (P_n) PKL-клони към задачата (P), тогава всяка клъстерна точка на редица от подходящи апроксимиращи относителни минимизатори (съответно силни минимизатори) на задачата (P_n) е относителен минимизатор (съответно силен минимизатор) на задачата (P). Ние показваме, че всеки относителен минимизатор на (P) може да бъде апроксимиран чрез редица от приблизителни минимизатори на задачите (P_n), когато редицата от задачи (P_n) е $Gamma-$сходяща към задачата (P).

[D. Kamburova and D.K. Nedelcheva: "Variational Principles for supinf Problems with Constraints Geometry, Integrability and Quantization, 2020, pp 163-169. DOI: 10.7546/giq-21-2020-163-169] Вариационните принципи са група резултати, които описват достатъчни условия, при които след смущение на полунепрекъсната отдолу функция, която е ограничена отдолу, от функция с произволно малка норма, получената оптимизационна задача има решение. В тази статия е разгледан следната "supinf"задача с ограничения:

$$(P) \qquad \sup_{x \in X, y \in Kx} \inf f(x,y)$$

където X и Y са пълни топологични пространства, $K : X \rightrightarrows Y$ е многозначно изображение и $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ е разширена функция с реална стойност.

Представени са някои предварителни резултати, сред които и резултат публикуван в [Gaumont D., Kamburova D., Revalski J. P., Perturbations of Supinf Problems with Constraints, Vietnam J. Math. 47 (2019) 659–667], като е разгледан вариационен принцип за задачата (P). Изследванията са посветени на намирането на достатъчно условия които осигуряват валидност на представените резултати в случай на задачата на Stackelberg.

Група [B] Теореми за неподвижните точки и приложения

Теорията на неподвижните точки е обект на активни изследвания с широк спектър от приложения в различни области. Включва резултати, които твърдят, че при определени условия еднозначното изображение f, дефинирано върху множеството X има една или повече неподвижни точки, т.е. съществува точка $x \in X$ такава, че $f(x) = x$. През 1922 г. полският математик Стефан Банах формулира и доказва теорема, която се отнася до съществуването и единствеността на неподвизна точка в пълно метрично пространство . Резултатът му е известен под името "Теорема за неподвижната точка на Банах"или "Принцип на Банах за свиващото изображение". Използвайки термина Хаусдорфова метрика, през 1969 г., Надлер въвежда понятието многозначно свиващо изображение и доказва многозначната версия на принципа на Банах за свиващото изображение. От тогава много математици работят неуморно в тази област, така се появяват и редица обобщения на принципа на Надлер за свиващото изображение.

Публикации от група [В]

1. **Д. Неделчева, Р. Маринов: "Теория на неподвижните точки монография, Университетско издателство при ТУ - Варна, ISBN 978-954-20-0818-7**

2. **D. K. Nedelcheva: "Altering Points in Partial Metric Space Geometry, Integrability and Quantization, 2020, pp 221-231. DOI: 10.7546/giq-21-2020-221-231**

3. **M. Hristov , A. Ilchev , D. Nedelcheva B. Zlatanov: "Existence of Coupled Best Proximity Points of p-Cyclic Contractions Axioms 2021, 10(1), 39; doi.org/10.3390/axioms10010039**

4. **G. Gecheva, D. Nedelcheva, M. Ruseva and B. Zlatanov: "Applications of Coupled Fixed Points for Multivalued Maps in the Equilibrium in Duopoly Markets and in Aquatic Ecosystems Axioms 2021, 10(2), 44; doi.org/10.3390/axioms10020044**

5. **Д. Неделчева: "Методи за решаване на обобщени уравнения-книга, Университетско издателство при ТУ - Варна, ISBN 978-954-20-0819-4**

[Д. Неделчева, Р. Маринов: "Теория на неподвижните точки монография, Университетско издателство при ТУ - Варна, ISBN 978-954-20-0818-7]. Целта на тази монография е да предостави актуален преглед на задачите свързани с теорията на неподвижните точки, да представи доказателства на някои нови теореми за двойно свиващи многозначни изображения, както и някои резултати за еднозначни изображения. Главите са посветени на съвременните изследвания и развитие на теорията за неподвижните точки. Тази монография съдържа предимно оригинални изследвания на авторите. Може да бъде от особен интерес за широк кръг математици, чиято област на изследвания е теорията на неподвижните точки.

Монографията се състои от три глави. Глава 1 „Неподвижни точки в метрични пространства“ дава историческа информация за основните задачи, представени в монографията. Също така представя някои основни определения и добре известни резултати. Подробните доказателства на теоремата за неподвижната точка на Банах и теоремата за неподвижните точки на Дончев - Хагър са изложени в монографията. Дончев и Хагър разглеждат обобщени методи за сходимост в метрично пространство и изучават съществуването на решение на обобщени уравнения с помощ на теоремите за неподвижната точка в метрични пространства.

В Глава 2 „Неподвижни точки в конусни метрични пространства“ са въведени някои определения и основни резултати в конусни метричните пространства. В тази глава се доказва съществуването и единствеността на неподвижните точки за композиция от две многозначни изображения в конусни метрични пространства. По-точно, ние разглеждаме теоремата за неподвижните точки за $\alpha - \psi -$ свиващи многозначни изображения в конусни метрични пространства, доказана от Kutbi и Situnavarat и доказваме разширяване на техния резултата за композиция от две свиващи многозначни изображения, като използваме понятието $\alpha - \beta - \psi - e -$ свиващи многозначни изображения. Доказваме единствеността на неподвижната точка в еднозначния случай, при допълнително предположение. Нещо повече, ние изучаваме съществуването и местоположението на двойка неподвижни точки (coupled fixed points) и общи неподвижни точки (common fixed points) за посочения вид многозначни изображения.

В глава 3 „Неподвижни точки в частични метрични пространства.“ са доказани теореми за неподвижните точка, които обобщават и допълват някои вече известни резултати. Доказваме съществуването на обща неподвижна точка за две многозначни изображения в пълни частични метрични пространства. Нещо повече, ние изучаваме съществуването и местоположението на двойки неподвижни точки за композиция от две псевдосвиващи многозначни изображения в частични метрични пространства с помощта на Bianchini-Grundolfi функции. Доказваме съществуването на решение на обобщената задача за двойки неподвижни точки в частични метрични пространства.

[D. K. Nedelcheva: "Altering Points in Partial Metric Space Geometry, Integrability and Quantization, 2020, pp 221-231. DOI: 10.7546/giq-21-2020-221-231]. Частичните метрични пространства, въведени през 1992 г., са обобщение на понятието метрично пространство, като в такива пространства разстоянието от една точка до същата тази точка не е непременно нула. По-късно много учени са работили върху теореми за неподвижни точки за многозначни изображения в частични метрични пространства. В тази статия е е разгледана композиция от две многозначни изображения в частични метрични пространства.

Нека (X, p) и (Y, σ) са две частични метрични пространства. Нека $F : X \rightrightarrows Y$ и $G : Y \rightrightarrows X$ са два многозначни оператора. В задачата се търсят точки $(x^*, y^*) \in X \times Y$ такива, че:

$$\begin{cases} x^* \in G(y^*) \\ y^* \in F(x^*). \end{cases}$$

Тогава, (x^*, y^*) се нарича "altering point"за F и G. В тази статия е доказано съществуването на "altering point"за две многозначни изображения в пълно частично метрично пространство.

[M. Hristov , A. Ilchev , D. Nedelcheva B. Zlatanov: "Existence of Coupled Best Proximity Points of p-Cyclic Contractions Axioms 2021, 10(1), 39; doi.org/10.3390/axioms10010039]. Оказва се, че през последните години, има голям интерес към двойките неподвижни точки, както към фундаменталните резултати свързани с този вид точки, така и към техните приложения. В статията обобщаваме дефиницията за двойки неподвижни точки (точки на най - добро приближение) за циклично подредени двойки изображения до p - циклично наредени двойки изображения.

Понятие, което обобщава резултатите за неподвижни точки за изображения от вида $T : A \to B$, $T : B \to A$., е това за цикличните изображения. Понякога класическото уравнение $x = Tx$ може да няма решение и по този начин теоремите за неподвижни точки не могат да бъдат приложени. Можем да преобразуваме задачата $x = Tx$ в оптимизационна задача от вида $\min\{\|x - Tx\|\}$. Вече е известно, че x се нарича точка на най - добро приближение за T в A, ако $\|x - Tx\| = \mathrm{dist}(A, B) = \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}$. Идеята за точки на най - добро приближение всъщност обобщава представата за циклични изображения, като ако $A \cap B \neq \emptyset$, то всяка точка на най - добро приближение е и неподвижна точка. Обобщаваме вече съществуващи техники, за да получим резултати за съществуването и единствеността на двойки неподвижни точки (точки на най - добро приближение) за p-циклични изображения. По-точно, откриваме достатъчни условия за съществуване и единственост на такива точки. Оказва се, че точките на най - добро приближение са интересни не само като чисто математически резултати, но и като възможност за нов подход в решаване на различни видове задачи. Споменаваме нов вид приложения в теорията за равновесието на дуополните пазари. Илюстрираме резултатите с пример, който обхваща широк клас изображения.

[G. Gecheva, D. Nedelcheva, M. Ruseva and B. Zlatanov: "Applications of Coupled Fixed Points for Multivalued Maps in the Equilibrium in Duopoly Markets and in Aquatic Ecosystems Axioms 2021, 10(2), 44; doi.org/10.3390/axioms10020044].

В края на XX век Дончев и Хагер успешно представят разширение на резултата за неподвижните точка на Надлер за многозначни изображения. Те определят местоположението на неподвижна точка по отношение на начална стойност на многозначното изображение. Заключението им е получено при наложени две модифицирани условия и е изиграло важна роля в развитието на метричната теория на неподвижните точки. Един вид обобщение на този резултат е обозначение с използването на двойки неподвижни точки. В статията получаваме нов клас подредени двойки многозначни карти, които имат двойки свързани неподвижни точки.

По-точно, разглеждаме две многозначни изображения $F_1 : X \times Y \rightrightarrows X$ и $F_2 : X \times Y \rightrightarrows Y$, където (X, ρ) и (Y, σ) са пълни метрични пространства. Доказваме съществуването на поне една наредена двойка (x, y), така че $x \in F_1(x, y)$ и $y \in F_2(x, y)$, което се нарича обобщена задача за двойки неподвижни точки за многозначните изображения (F_1, F_2). Илюстрираме основния резултат с два примера, които обхваща множество различни модели. Прилагаме основния резултат в моделите на дуополните пазари, за да постигнем съществуване на пазарно равновесие, както и в водните екосистеми, където също се получава равновесие.

[Д. Неделчева: "Методи за решаване на обобщени уравнения-книга, Университетско издателство при ТУ - Варна, ISBN 978-954-20-0819-4]. Теорията на неподвижните точки има множество практически приложения. Тя се използва при решаването на обобщени уравнения, системи от нелинейни вариационни неравенства, системи йерархични вариационни неравенства, в теорията на игрите и т.н.

В тази книга е доказана локалната сходимост на три метода за решаване на обобщени уравнения. Обобщените уравнения, служещи като абстрактен модел за решаване на много вариационни задачи, като задачи на линейното и нелинейно оптимиране, системи от нелинейни уравнения, необходими условия от първи ред на нелинейно оптимиране и др. Те се използват широко и в инженерните науки и икономиката.

В глава 1 „Основни дефиниции и резултати“ даваме историческа информация за основните задачи, представени в книгата. Също така са изложени някои основни определения и добре познати резултати.

В глава 2 "Метод от Нютонов тип, включващ точкова апроксимация"се доказва локалната сходимост на метода

$$0 \in A(p, x_k, x_{k+1}) + F(x_{k+1}),$$

с цел да се намери решението на обобщеното уравнение:

$$\text{Да се намери} \quad x \in X \quad \text{така че} \quad 0 \in f(p, x) + F(x).$$

Доказано е, че този метод е сходящ към стойността $s(p)$ на липшицовата локализация на изображението на решението, ако изображението

$$f(\bar{p}, \bar{x}) + \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})(\cdot - \bar{x}) + F(\cdot)$$

е строго метрично регулярно в $\bar{x}$ за 0 с еднозначна липшицова локализация σ около 0 за $\bar{x}$ на обратното изображение

$$[f(\bar{p}, \bar{x}) + \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})(\cdot - \bar{x}) + F(\cdot)]^{-1},$$

f е липшицова функция спрямо p равномерно по x, функцията $A : P \times X \times X \to Y$ е (n, α) - поточкова апроксимация за f и $\nabla_x f$ е липшицова спрямо x равномерно по p.

В глава 3 "Метод на хордите за решаване на параметрични обобщени уравнения"изучаваме локалната сходимост на метода на хордите за решаване на негладки обобщени уравнения от вида:

$$\text{Да се намери} \quad x \in X \quad \text{така че} \quad y \in f(x) + F(x),$$

където f е функция, F е многозначно изображение, дефинирано върху банахово пространство X със стойности в линейно нормирано простраство Y.

Доказана е сходимост на метода

$$y \in f(x_k) + A(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}),$$

при условие, че многозначното изображение

$$[f(x^*) + \nabla f(x^*)(\cdot - x^*) + F(\cdot)]^{-1}$$

е Обен-непрекъснато в $(0, x^*)$ с константа M, $f : X \to Y$ е функция, чиято производна по Фреше е $L-$липшицова и оператора $A \in L(X, Y)$ е такъв, че $2M\|\nabla f(x^*) - A\| < 1$. Нека уточним, че когато $A = \nabla f(x_0)$ и $y = 0$ този метод се редуцира до добре познатият модифициран метод на Нютон

$$0 \in f(x_k) + \nabla f(x_0)(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}).$$

Основното предимство на доказаният метода е фактът, че при прилагането му няма нужда да се изчислява производната на функцията f, което в някои случаи може да е свързано с доста изчисления.

В Глава 4 "Метод на секущите"разглеждаме обобщени уравнения от вида

$$0 \in f(p, x) + g(p, x) + F(x). \tag{3}$$

Разглеждаме метода

$$0 \in f(p, x_k) + g(p, x_k) + (\nabla_x f(p, x_k) + [p, x_{k-1}, x_k; g])(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}), \tag{4}$$

където $f : P \times X \to Y$ е диференцируема в околност на решението $(\bar{p}, \bar{x})$ на обобщеното уравнение. Функцията $g : P \times X \to Y$ е диференцируема в $(\bar{p}, \bar{x})$, но може да не е диференцируема в околност на $(\bar{p}, \bar{x})$. Показваме, че този метод е сходящ към стойностттa $s(p)$ на липшицовата локализация на изображението на решението, ако изображението

$$f(\bar{p}, \bar{x}) + g(\bar{p}, x) + \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})(x - \bar{x}) + F(x)$$

е силно метрично регулярно в $\bar{x}$ за 0, където $(\bar{p}, \bar{x})$ е решение на разглежданото обобщено уравнение с еднозначна липшицова локализация σ около 0 за $\bar{x}$ на обратното изображение

$$[f(\bar{p}, \bar{x}) + g(\bar{p}, x) + \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})(x - \bar{x}) + F(x)]^{-1}.$$

При този метод f и g са липшицови функции спрямо двете променливи в околност на точката $(\bar{p}, \bar{x})$, производната по фреше $\nabla_x f$ е липшицова спрямо x равномерно по p, $4\,\mathrm{lip}(\sigma; 0).\widehat{\mathrm{lip}}_x(g; (\bar{p}, \bar{x})) < 1$. За разделената разлика от втори ред предполагаме, че е в сила следното условие $\|[p, x, y, z; g]\| \leq K, \;\; K \in \mathbb{R}$.

Използваме метода на секущите и дефинираме неявно изображение, включващо редици от итерации, като елементи на пространство от редици. По този начин доказваме теорема за неявната функция. Такива теореми обикновено се използват в различни области на математиката, включително частни диференциални уравнения, негладък анализ и числен анализ.