

**Проф. д-р инж. Върбан Д. Милков**

**СЪПРОТИВЛЕНИЕ  
НА  
МАТЕРИАЛИТЕ**

**(теория, задачи и софтуер)**

**Второ коригирано и актуализирано издание**

**Технически университет – Варна**

**2008**

## *На братята ми Милчо и Васил*

Книгата съдържа курса лекции по Съпротивление на материалите, които авторът чете пред студентите от машиностроителните и корабостроителни специалности на Техническия университет – Варна. Тя може да се използва и от студенти от други технически и строителни университети в страната, както и при проектирането.

За по-доброто усвояване на материала, са разработени значителен брой примери. За бързото и точно решаване на студентски проекти и за решаване на конкретни задачи от практиката, към книгата се прилага софтуер, разработка на автора.

Адрес за контакти с автора: **VMilkov@GMAIL.COM**

Учебната версия на софтуера и тази книга можете да изтеглите от:

**WWW.SDAN.HIT.BG**

**Единици за мерки, използвани в Съпротивление на материалите  
(система SI)**

<b>Величина</b>	<b>Единица мярка</b>	<b>SI символ</b>	<b>Означение</b>
<b>ОСНОВНИ</b>			
Дължина	Метър	<i>m</i>	<i>l</i>
Маса	Килограм	<i>kg</i>	<i>m</i>
Време	Секунда	<i>s</i>	<i>t</i>
Ъгъл	Радиан	<i>rad</i>	$\alpha, \beta$
Температура	Градус	$^{\circ}$	$T^{\circ}$
<b>ПРОИЗВОДНИ</b>			
Ускорение линейно	метър/секунда <sup>2</sup>	$m/s^2$	<i>a</i>
Ускорение земно	метър/секунда <sup>2</sup>	$m/s^2$	<i>g</i>
Ускорение ъглово	радиан/ секунда <sup>2</sup>	$rad/s^2$	$\varepsilon$
Площ	метър <sup>2</sup>	$m^2$	<i>F</i>
Обем	метър <sup>3</sup>	$m^3$	<i>V</i>
Плътност	Килограм/метър <sup>3</sup>	$kg/m^3$	$\rho$
Сила	Нютон	<i>N</i>	<i>P</i>
Енергия (Работа)	Джаул	$J = N.m$	<i>U</i>
Относително тегло	Нютон/метър <sup>3</sup>	$N/m^3$	$\gamma$
Честота	Херц	$Hz = 1/s$	<i>f</i>
Момент на сила	Нютон.метър	$N.m$	<i>M</i>
Бимомент	Нютон.метър <sup>2</sup>	$N.m^2$	<i>B</i>
Масов момент на инерция	килограм.метър <sup>2</sup>	$kg.m^2$	<i>I</i>
Лицев момент на инерция	метър <sup>4</sup>	$m^4$	<i>J</i>
Мощност	Ват	$W = J/s$	<i>N</i>
Напрежение, Налягане	Паскал	$Pa = N/m^2$	$p, \sigma, \tau$
Скорост линейна	метър/секунда	$m/s$	<i>V</i>
Скорост ъглова, Честота кръгова	радиан/секунда	$rad/s$	$\omega$
Деформация относителна	-	-	$\varepsilon$
Деформация ъглова	Радиан	<i>rad</i>	$\gamma$
Разпределен товар по линия	Нютон/метър	$N/m$	<i>q</i>
Статичен момент	метър <sup>3</sup>	$m^3$	<i>S</i>
Съпротивителен момент	метър <sup>3</sup>	$m^3$	<i>W</i>
Коефициент на темпер. разширение	1/градус	$deg^{-1}$	$\alpha$
Модули на еластичност	Паскал	$Pa = N/m^2$	<i>E, G</i>
Обороти за минута	1/минута	$min^{-1}$	<i>n</i>

**Преобразуване на някои по-често срещани величини от английската (американската) към SI измерителна система**

<b>Величина</b>	<b>Мярка (GB, USA)</b>	<b>Мярка (SI)</b>
Дължина	$1 \text{ foot} = 1 \text{ ft}$ $1 \text{ inch} = 1 \text{ in}$ $1 \text{ mile} = 1 \text{ mi}$ $1 \text{ nautical mile} = 1 \text{ mi}$	$0.3048 \text{ m}$ $0.0254 \text{ m}$ $1.609 \text{ km}$ $1.852 \text{ km}$
Площ	$1 \text{ foot}^2 = 1 \text{ ft}^2$ $1 \text{ inch}^2 = 1 \text{ in}^2$	$0.0929 \text{ m}^2$ $645.2 \text{ mm}^2$
Обем	$1 \text{ foot}^3 = 1 \text{ ft}^3$ $1 \text{ inch}^3 = 1 \text{ in}^3$	$0.02832 \text{ m}^3$ $16.39\text{E-}6 \text{ m}^3$
Сила	$1 \text{ kip} = 1000 \text{ lb}$ $1 \text{ pound force} = 1 \text{ lib}$	$4.448 \text{ kN}$ $4.448 \text{ N}$
Маса	$1 \text{ pound mass} = 1 \text{ lbm}$ $1 \text{ slug} = 1 \text{ lb}\cdot\text{sec}^2/\text{ft}$ $1 \text{ metric ton} = 2000 \text{ lbm}$	$0.4536 \text{ kg}$ $14.59 \text{ kg}$ $907.2 \text{ kg}$
Напрежение Налягане	$1 \text{ atmosphere} = 14.7 \text{ lb/in}^2$ $1 \text{ pound/foot}^2 = 1 \text{ lb/ft}^2$ $1 \text{ pound/inch}^2 = 1 \text{ lb/in}^2 = 1 \text{ psi}$ $1 \text{ kip/inch}^2 = 1 \text{ ksi}$	$101.3 \text{ kPa}$ $47.88 \text{ Pa}$ $6.895 \text{ kPa}$ $6.895 \text{ MPa}$
Плътност	$1 \text{ pound mass/inch}^3 = 1 \text{ lbm/in}^3$ $1 \text{ pound mass/foot}^3 = 1 \text{ lbm/ft}^3$	$27.68 \text{ Mg/m}^3$ $16.02 \text{ kg/m}^3$
Мощност	$1 \text{ foot pound/second} = 1 \text{ ft}\cdot\text{lb/s}$ $1 \text{ horsepower} = 543 \text{ ft}\cdot\text{lb/s}$	$1.356 \text{ W}$ $736 \text{ W}$
Скорост	$1 \text{ foot/second} = 1 \text{ ft/s}$ $1 \text{ knot (nautical)} = 1 \text{ mi/h}$	$0.3048 \text{ m/s}$ $0.5144 \text{ m/s} = 1.852 \text{ km/h}$

**Представки за образуване на големи и малки величини**

<b>Множител</b>	<b>Представка</b>	<b>Символ (SI)</b>
$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$	Тера	<b>T</b>
$1\ 000\ 000\ 000 = 10^9$	Гига	<i>G</i>
$1\ 000\ 000 = 10^6$	Мега	<i>M</i>
$1\ 000 = 10^3$	Кило	<i>k</i>
$100 = 10^2$	Хекто	<i>h</i>
$10 = 10$	Дека	<i>da</i>
$0.1 = 10^{-1}$	Деци	<i>d</i>
$0.01 = 10^{-2}$	Санتي	<i>c</i>
$0.001 = 10^{-3}$	Мили	<i>m</i>
$0.000\ 001 = 10^{-6}$	Микро	$\mu$
$0.000\ 000\ 001 = 10^{-9}$	Нано	<i>n</i>
$0.000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-12}$	Пико	<i>p</i>

## СЪДЪРЖАНИЕ

Предговор към първото издание.....	9
<b>Гл. 1. Въведение в Съпротивление на материалите</b>	
1.1. Основни задачи на Съпротивление на материалите.....	10
1.2. Реален обект и изчислителна схема.....	12
1.3. Вътрешни (разрезни) усилия.....	16
1.4. Диференциални зависимости между разрезните усилия.....	20
1.5. Проверка на диаграмите на разрезните усилия.....	21
1.6. Понятия за премествания, деформации и напрежения.....	28
1.7. Закон на Хук и някои общи принципи и хипотези.....	32
1.8. Методи за изчисление на конструкциите.....	36
<b>Гл. 2. Геометрични характеристики на равнинни фигури</b>	
2.1. Статични моменти. Център на тежестта. ....	38
2.2. Инерционни моменти. Инерционни радиуси.....	41
2.3. Връзка между инерционните моменти при завъртане на координатната система.....	47
2.4. Геометрично решаване на определени интеграли. Правило на Верещагин. ....	53
2.5. Секторни характеристики на тънкостенни профили.....	55
<b>Гл. 3. Центричен опън/натиск.</b>	
3.1. Напрегнато състояние при опън/натиск.....	62
3.2. Деформирано състояние при опън/натиск.....	68
3.3. Статически неопределени системи при опън/натиск.....	71
3.4. Изпитване на материалите на опън/натиск.....	76
3.5. Гъвкави нишки.....	85
<b>Гл. 4. Въведение в теорията на напрегнатото и деформирано състояние</b>	
4.1. Напрегнато състояние в точка.....	93
4.2. Напрежения по площадка в общо положение.....	95
4.3. Главни площадки. Главни напрежения.....	98
4.4. Елипсоид на напреженията. ....	102
4.5. Равнинно напрегнато и равнинно деформирано състояние.....	104
4.6. Максимални тангенциални напрежения и площадки при обемно напрегнато състояние.....	108
4.7. Деформирано състояние в точка.....	110
4.8. Обобщен закон на Хук.....	113
4.9. Понятие за тензометриране.....	117

4.10. Теорема на Клапейрон. Потенциална енергия на деформацията.....	120
4.11. Енергия за изменение на обема и формата на телата.....	122

## **Гл. 5. Въведение в теорията на граничното напрегнато състояние**

5.1. Понятие за гранично напрегнато състояние. Еквивалентно напрежение.....	124
5.2. Основни хипотези за гранично напрегнато състояние.....	126
5.3. Теория на Мор.....	128
5.4. Определяне на еквивалентното напрежение за някои частни случаи.....	132

## **Гл. 6. Чисто усукване**

6.1. Чисто усукване на пръти с кръгло напречно сечение.....	133
6.2. Усукване на пръти с некръгло напречно сечение.....	140
6.3. Свободно усукване на пръти с отворени тънкостенни профили.....	142
6.4. Усукване на пръти със затворени тънкостенни профили.....	147
6.5. Стеснено усукване на пръти с отворени тънкостенни профили.....	150

## **Гл. 7. Специално огъване**

7.1. Напрежения при чисто огъване.....	159
7.2. Напрежения при напречно специално огъване.....	163
7.3. Диференциално уравнение на еластичната линия на праволинейна греда.....	172
7.4. Метод на началните параметри.....	176
7.5. Огъване на греда, лежаща на еластична основа.....	179

## **Гл. 8. Сложна съпротива**

8.1. Косо огъване.....	181
8.2. Нецентричен опън/натиск. Ядро на сечението.....	185
8.3. Огъване с усукване и осова сила на кръгли валове.....	188
8.4. Огъване на греди с голяма кривина.....	191
8.5. Огъване на тънкостенни профили. Център на огъването.....	195
8.6. Общ случай на натоварване на тънкостенни пръти.....	199

## **Гл.9. Енергетични методи за определяне на премествания.**

9.1. Потенциална енергия на деформацията при сложно натоварване.....	202
9.2. Теорема на Кастиляно.....	204
9.3. Общ метод за определяне на премествания. Интеграл на Максвел - Мор.....	207
9.4. Деформации и напрежения в цилиндрични винтови пружини.....	211
9.5. Теорема за взаимност на работата и преместванията.....	214

## **Гл. 10. Статически неопределени системи.**

10.1. Класификация на прътовите конструкции. Степен на статическа неопределеност.....	216
10.2. Решение на статически неопределени системи по силовия метод.....	219
10.3. Използване на симетрията. Симетрично и антисиметрично натоварване.....	225
10.4. Равнинно-пространствени системи.....	230
10.5. Непрекъснати греди. Тримоментово уравнение.....	231
10.6. Определяне на премествания в статически неопределени системи.....	236

## **Гл.11. Устойчивост на равновесието на деформируеми системи.**

11.1. Понятие за устойчивост и неустойчивост. Задача на Ойлер.....	237
11.2. Зависимост на критичната сила от начина на закрепване на пръта.....	242
11.3. Граница на приложение на формулата на Ойлер. Диаграма на критичното напрежение. ....	247
11.4. Оразмеряване на натиснати пръти. ‘Фи’ метод.....	249
11.5. Енергетичен метод за определяне на критичната сила.....	252
11.6. Нецентричен натиск на гъвкав прът.....	255
11.7. Огъване при наличие на осова сила.....	257
11.8. Някои съображения при избора на материала и профилана натиснатите пръти. Устойчивост на пръти от съставни профили .....	267

## **Гл.12. Дебелостенни тръби и бързовъртящи се дискове.**

12.1. Постановка на задачата и основни уравнения.....	261
12.2. Премествания и напрежения в дебелостенните тръби. Частни случаи.....	263
12.3. Съставни тръби. Автофретирание.....	267
12.4. Бързовъртящи се дискове с постоянна дебелина.....	272

## **Гл. 13. Тънки плочи и черупки**

13.1. Безмоментна теория на черупките. Уравнение на Лаплас.....	277
13.2. Огъване на цилиндрична черупка. Граничен ефект.....	281
13.3. Огъване на кръгли плочи.....	287

## **Гл. 14. Пресмятане на конструкции над границата на еластичност.**

14.1. Особенности на изчислението и схематизация на диаграмата на опън.....	292
14.2. Пресмятане на системи, работещи на опън/натиск в пластичната област.....	294
14.3. Усукване на прът при наличие на пластични деформации.....	296
14.4. Еласто-пластично огъване на греда.....	298

<b>Гл. 15. Якост при циклично натоварване.</b>	
15.1. Понятие за якостна умора. Основни характеристики на цикъла.....	302
15.2. Влияние на концентрацията на напреженията, състоянието на повърхнините и размерите на детайлите върху якостта на умора.	308
15.3. Определяне на коефициента на сигурност при якостна умора.....	313
15.4. Основи на теорията на разрушението.....	315
<b>Гл. 16. Динамично действие на товарите</b>	
16.1. Свободни трептения на система с една степен на свобода.....	322
16.2. Принудени трептения на система с една степен на свобода.....	328
16.3. Трептения на системи с две и повече степени на свобода.....	334
16.4. Трептения на системи с разпределени параметри.....	338
16.5. Ударно натоварване.....	342
<b>Гл. 17. Съвременни числени методи за анализ</b>	
17.1. Метод на крайните елементи (Равнинна задача).....	348
<b>Гл. 18. Решение на задачите на Съпротивление на материалите с компютърни методи</b>	
18.1. Теоретична основа и характеристика на пакета СДАН.....	363
18.2. Определяне на главни напрежения и направления в точка.....	366
18.3. Определяне на геометрични и секторни характеристики на равнинни фигури.....	367
18.4. Статичен анализ на греди и рамки (Определяне на разрезните усилия, премествания и напрежения в греди и рамки - праволинейни и криволинейни, греди на еластична основа, статически определени и неопределени).....	370
18.5. Определяне на критичните товари в греди и рамки.....	383
18.6. Статичен анализ на ососиметрични черупки и кръгли плочи (Определяне на вътрешните усилия и напрежения в ососиметрични черупкови конструкции по моментната теория .....)	386
18.7. Динамичен анализ на греди и рамки (Определяне на собствени честоти на системи с дискретни и разпределени параметри. Определяне на динамичните напрежения).....	389
18.8. Приложения към пакета СДАН.....	392
Приложение 1. Физични характеристики на някои материали.....	397
Приложение 2. Механични характеристики на някои материали.....	398
Литература.....	400



## Предговор към първото издание (2001)

Настоящият учебник съдържа лекциите по Съпротивление на материалите, които авторът е чел пред студентите от Технически университет – Варна през изминалите 20 години (при годишен хорариум -90 ч. лекции). За такъв период от време пред всеки преподавател се появява предизвикателството на професията да опише своя опит.

Авторът счита, че главната цел на дисциплината Съпротивление на материалите е студентите да получат умения за решаване на конкретни задачи от практиката. За тази цел авторът се е опитал теорията да бъде изложена по такъв начин, че вниманието на студентите (и другите читатели) да бъде привлечено към нейното практическото приложение. В тази връзка към всяка глава са разработени съответен брой примери.

Развитието на математиката, електрониката и новите технологии през последните 50 години доведоха до нови възможности за анализ и проектиране на нови машини и съоръжения, основани на широкото използване на компютърната техника. В началото на новото хилядолетие, компютрите и софтуерът за тях позволяват решение на задачите на Съпротивление на материалите бързо и точно. Това днес е ежедневна практика в конструкторските бюра. С тази цел за почти всички задачи, предмет на Съпротивление на материалите, към книгата е добавен съответен софтуер.

Груба грешка е обаче да се мисли, че можем да използваме компютрите без да познаваме фундамента на науката за проектиране на конструкции – Съпротивление на материалите. Една допусната грешка във входните данни – случайна или поради незнание, може да доведе до резултати, нямащи нищо общо с действителните. Поради това е необходимо не само правилно да задаваме входните данни, но и правилно да разчитаме резултатите. Това обаче може да стане едва след усвояването на науката за Съпротивление на материалите.

При изложение на материала в книгата особено важните определения, терминология, принципи, закони и др. са написани с **по-тъмен шрифт**. Същото се отнася и за векторните величини. При решаване на примерите е използвана главно система **SI**.

Изказвам благодарността си на доц. д-р инж. Д. Дишев, който прегледа внимателно предварителните записки на учебника и направи някои ценни препоръки.

Надявам се, че тази книга ще бъде използвана не само за учебни цели, но и в конструкторската практика. Ще бъдат приети с благодарност всички бележки и препоръки, които биха подобрили бъдещите издания на книгата и софтуерът към нея.

## Гл. 1. ВЪВЕДЕНИЕ В СЪПРОТИВЛЕНИЕ НА МАТЕРИАЛИТЕ

### 1.1. Основни задачи на Съпротивление на материалите

От гледна точка на Съпротивление на материалите към всяка конструкция се предявяват следните две изисквания:

1. Да бъде достатъчно яка.
2. Да бъде достатъчно корава.

Под **якост** разбираме свойството на телата да приемат външните товари без да се разрушават. Под **коравина** разбираме свойството на телата да приемат външните товари без да променят чувствително формата и размерите си.

Това, че телата не бива да се разрушават, се разбира от само себе си. Това, че телата не бива да променят извънредно първоначалната си форма и размери е продиктувано от експлоатационни, естетични и други причини.

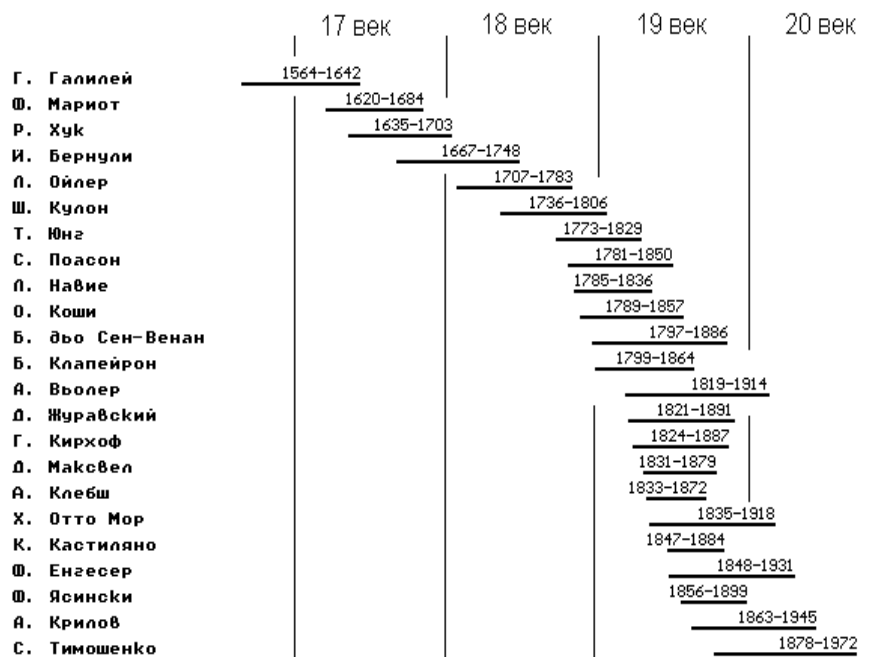
За решението на тези две задачи в Съпротивление на материалите се използват законите на Теоретичната механика и някои физически закони. Има обаче съществена разлика: В Теоретичната механика телата се разглеждат като **абсолютно твърди**, докато в Съпротивление на материалите телата се считат за **деформируеми**, т.е. такива, каквито реално те са. Затова тук говорим за **Механика на твърдото деформируемо тяло**. През последните няколко години съществува тенденция названието на дисциплината Съпротивление на материалите да се замести с **Механика на материалите**, което название отразява по-точно съдържанието и. В тази дисциплина се акцентира повече върху физическите основи на якостта на материалите.

С проблемите на механиката на твърдото деформируемо тяло се занимават и дисциплината **Теория на еластичността**. В тази дисциплина обаче за решение на същите задачи се използва сложен математически апарат, поради което е непригодна за ежедневната инженерна практика. В същото време точните решения, получени в Теорията на еластичността, дават основание да се въведат някои съществени опростявания, използвани в Съпротивление на материалите.

Освен Теория на еластичността, с деформируемото твърдо тяло се занимават още ред други дисциплини като: **Теория на пластичността**, **Теория на пълзенето**, **Устойчивост на деформируеми системи**, **Теория на трептенията**, **Теория на разрушението** и др. Съществуват и приложни дисциплини, ориентирани към определени обекти, като **Строителна механика на съоръженията**, **Строителна механика на кораба**, **Строителна механика на самолета** и др. Всички те са надстройка на Съпротивление на материалите.

Съпротивление на материалите като наука е сравнително млада – малко повече от 350 години. Счита се, че тя води своето начало от работите

на **Галилео Галилей**, посветени на проблема за огъване на конзолна греда, публикувани през 1638 г. В табл.1.1 в хронологичен ред са дадени имената и времето през което са работили най-бележитите учени на човечеството, положили фундамента на Съпротивление на материалите. Най-големи успехи в развитието на теорията и практиката обаче са постигнати през изминалия двадесети век успоредно с развитието на новите технологии и електронно изчислителната техника.



*Табл.1.1. Учени, положили фундамента на Съпротивление на материалите*

Известно е, че до наше време са стигнали значителни съоръжения с хилядолетна история, построени от хората, което показва, че може да се строи и без да се знае Съпротивление на материалите. Но в последния случай строителството се извършва слепешката, залага се изцяло на интуицията и на опита на предшествениците ни. Такъв метод на работа не винаги гарантира сигурността на съоръженията. Действително, историята ни осведомява за огромен брой катастрофи на големи съоръжения и машини, довели до човешки жертви и значителни материални загуби, главната причина за които е била неправилното проектиране. Ето защо е абсолютно необходимо съвременният инженер да владее методите за определяне на **сигурните размери** на телата и конструкциите, онези размери, които осигуряват необходимите якост и коравина.

При решението на задачите на Съпротивление на материалите не на последно място следва да се съобразяваме и с **разходите**, които се правят за постигане на поставената цел. Тук естествено влизат цени на материали, използвана технология и машини за обработка, енергоемкост, транспортни разходи и други. Конструкторът трябва да е наясно с всички тези въпроси от началото до края на производствения цикъл на проектираното изделие или съоръжение.

## 1.2. Реален обект и изчислителна схема

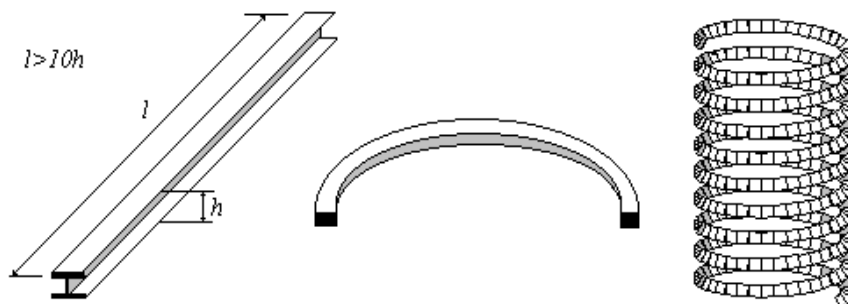
**Реални обекти** в Съпротивление на материалите могат да бъдат отделни тела, възли или цели съоръжения. Преди да бъдат извършени каквито и да са изчисления на реалните обекти, следва да се избере **изчислителна схема**. **Схематизация** означава да се отхвърлят всички несъществени свойства на обекта, които не влияят изобщо или влияят малко на изчислителния процес.

Схематизацията обхваща три страни на обекта и съответно се дели на: **геометрическа, физическа и силова** схематизация.

### А) Геометрическа схематизация

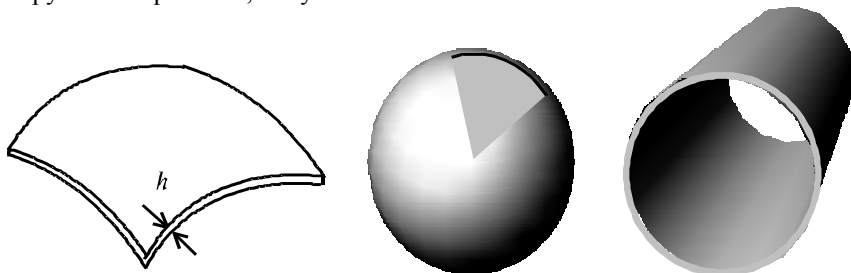
**Геометрическата** схематизация означава да отнесем реалния обект към една или някаква съвкупност от следните три форми: **гредата, черупката или масивно тяло**.

Под **гредата** разбираме тяло, единият размер на което е много по-голям от останалите два (поне 10 пъти по-голям) – фиг.1.1. Геометричното място на точки, съединяващи центровете на тежест на напречните сечения на гредата оформят нейната **ос**. В Съпротивление на материалите в повечето случаи ще изобразяваме гредата с нейната ос. Според формата на оста им, гредите могат да бъдат **праволинейни, криволинейни, равнинни и пространствени**.



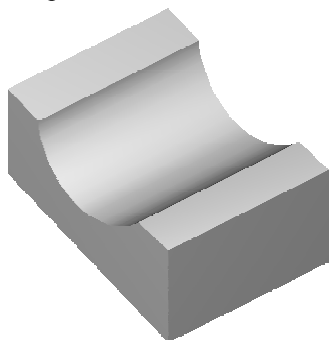
Фиг.1.1. Греди

**Черупка** наричаме тяло, единият размер на което е много по-малък от останалите два – фиг.1.2. Геометричното място на точките, които разполовяват дебелината на черупката, наричаме **средна повърхнина** на черупката. Според вида на средната повърхнина, черупките могат да бъдат **ротационни** и с произволна форма. Когато средната повърхнина на черупката е равнина, получаваме **плоча**.



**Фиг.1.2. Черупки**

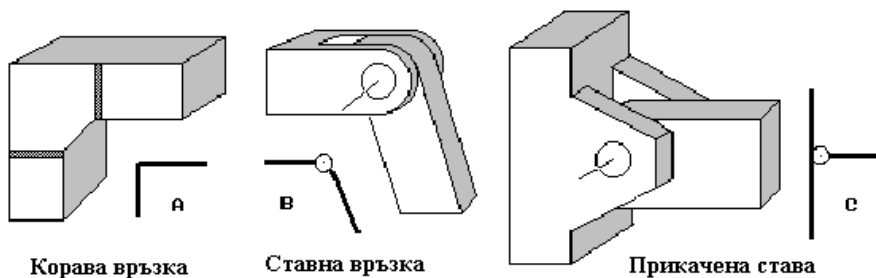
**Масивно тяло** наричаме тяло, трите размера на което са съизмерими. Формата на тялото може да бъде произволна – фиг.1.3.



**Фиг.1.3. Масивно тяло**

В Съпротивление на материалите се разглеждат главно конструкции, съставени от тела с първата форма – греди и отчасти с втората форма – черупки и плочи.

Към въпроса за геометричната схематизация се отнасят и въпросите за връзките на телата помежду си и за закрепването на телата в пространството. На фиг.1.4 са показани най-често срещаните връзки, а на фиг.1.5 – най-често срещаните опори.



**Фиг.1.4. Най-често срещани връзки**



Фиг.1.5. Най-често срещани опори

### Б) Физическа схематизация

**Физическата схематизация** се отнася до свойствата на материала, от който е направено тялото. Вече казахме, че в Съпротивление на материалите всички тела се считат за **деформируеми**. Ще считаме още, че всички материали притежават следните свойства: **хомогенност, изотропност, идеална еластичност и имат непрекъсната структура**.

Под **хомогенност** разбираме, че свойствата на материала са едни и същи във всеки един обем от него, независимо от големината му.

Под **изотропност** разбираме, че свойствата на материала са едни и същи по всички направления, минаващи през дадена точка. Има материали, които не се подчиняват на това свойство, например дървото, където свойствата са различни по две взаимно перпендикулярни направления - по направление на жилите му и перпендикулярно на тях. Такива материали се наричат **анизотропни**.

**Идеална еластичност** означава, че след като се разтоварят, телата възвръщат изцяло първоначалната си форма и размери. Разбира се има материали, които не се подчиняват на това свойство – например пластелинът.

Под **непрекъсната структура** ще считаме, че в материала, от който са изготвени телата, липсват пукнатини, шупли, неметални включвания и други дефекти.

Всички метали притежават в една или друга степен цитираните пет свойства.

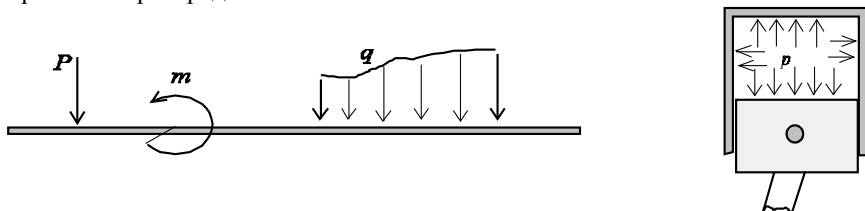
### В) Силова схематизация.

**Силите** са израз на взаимодействие между телата. По начина на възникване те могат да бъдат: **гравитационни, сили от вятъра, центробежни, инерционни, хидростатични и хидродинамични, електромагнитни** и други.

Според начина на прилагане силите се делят на: **съсредоточени сили (N) и моменти (Nm), разпределени сили по линия (N/m), разпределени**

**сили по площ (налягане-  $N/m^2$ ) и разпределени сили по обема на тялото ( $N/m^3$ ) – фиг.1.6.**

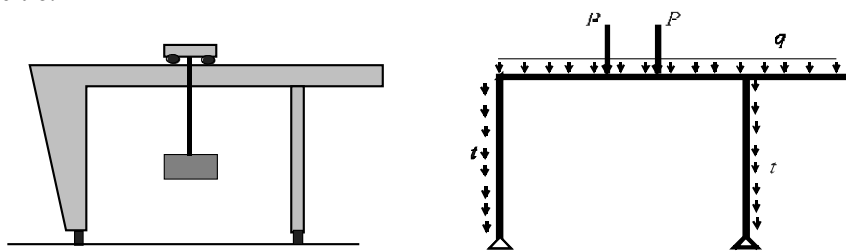
Например: Теглото на машина, монтирана върху конструкция, може да се приеме за съсредоточена сила; Силата на вятъра, която действа по височината на един комин, може да се приеме за разпределена сила по дължината на комина; Налягането на газовете в цилиндъра на двигател с вътрешно горене може да се приеме за разпределена сила по повърхност; Центробежните сили, действащи върху една турбинена лопатка при нейното въртене действуват върху всяка една частица от нея и могат да се приемат за разпределени сили по обема и.



**Фиг.1.6. Видове сили според начина им на прилагане**

Според закона на изменението им във времето силите могат да бъдат **статично приложени** (не се изменят във времето) и **динамични** сили, които се изменят по определен закон. Когато времето, през което те действуват е много малко (по-малко от секунда) получаваме **ударно** натоварване.

На фиг.1.7 е показан портален кран и неговата най проста-изчислителна схема под действието на полезния товар и собственото му тегло.



**Фиг.1.7. Портален кран и изчислителната му схема.**

Изборът на изчислителната схема за даден реален обект е изключително отговорен момент при проектирането и анализа. Изчислителната схема може да бъде по-проста и по-сложна. В някои случаи анализът на дадена изчислителна схема е невъзможен без наличието на специализиран софтуер. Но дори и да разполагаме с такъв, моделът, който ще приемем, зависи само от нас и затова изчислителната схема е един творчески процес. Най-добрият модел е онзи, който при най-малък обем

изчисления ни дава най-точни резултати. Неправилно съставен модел може да доведе до резултати, нямащи нищо общо с истината. Изграждането на правилни модели обаче е възможно, ако познаваме детайлно процесите в съответния реален обект, което може да се получи след съответна проектантска и експлоатационна практика.

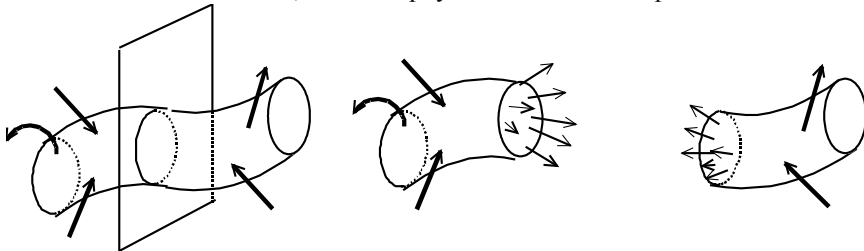
В Съпротивление на материалите в повечето случаи ще разглеждаме готови изчислителни схеми, които впоследствие могат да бъдат отнесени към различни реални обекти.

### 1.3. Вътрешни (Разрезни) усилия

Вътрешните сили са израз на взаимодействието между частиците на тялото. Тук става дума обаче не за силите между атомите, а за силите между частиците, които се появяват като противодействие на външните сили. В земни условия на всички тела действуват някакви външни сили, например гравитацията, поради което в телата винаги действуват и вътрешни сили. (Ето защо в космоса, където липсват сили на гравитацията, могат да се построят огромни по своите размери съоръжения, без опасност от разрушаване, докато се движат равномерно по орбита.)

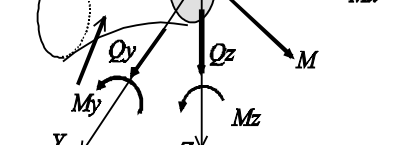
#### А) Определения

Ако мислено разрежем едно тяло (греда) с произволна равнина, силите на взаимодействие между частиците в общия случай не са известни нито по-големина, нито по посока. При това те действуват както върху лявото сечение на тялото, така и върху дясното сечение (фиг.1.8).



Фиг.1.8. Сили между частиците на тялото

Но както и да действуват върху всяка от двете части от тялото, от Теоретичната механика е известно, че всяка система от сили може да бъде приведена към един главен вектор  $R$  и един главен момент  $M$  - фиг. 1.9.



Фиг.1.9. Вътрешни усилия

Тъй като главният вектор и главният момент са **векторни величини**, (величини, които освен големина, имат и посока), за тяхното определяне сме длъжни да въведем координатна система. В



Съпротивление на материалите се използва следната правоъгълна координатна система: Началото на координатната система съсредоточаваме в центъра на тежестта на сечението, което е перпендикулярно на оста на гредата. Ос  $X$  насочваме перпендикулярно на сечението (по оста на гредата), а осите  $Y$  и  $Z$  лежат в самото сечение.

В правоъгълната координатна система  $XYZ$  всеки вектор има по три компоненти:

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

Компонентите на главния вектор  $\mathbf{R}(R_x, R_y, R_z)$  означаваме с:  $N=R_x$ ,  $Q_y=R_y$  и  $Q_z=R_z$ , които наричаме съответно **нормална сила**, **срязваща сила по ос  $Y$**  и **срязваща сила по ос  $Z$** . Компонентите на главния момент  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  наричаме съответно **усукващ момент**, **огъващ момент около ос  $X$**  и **огъващ момент около ос  $Y$** . Общо шестте компоненти наричаме **вътрешни усилия** или **разрезни усилия**, защото както ще видим, те могат да се определят чрез съответен разрез на гредата и написване уравненията за равновесие.

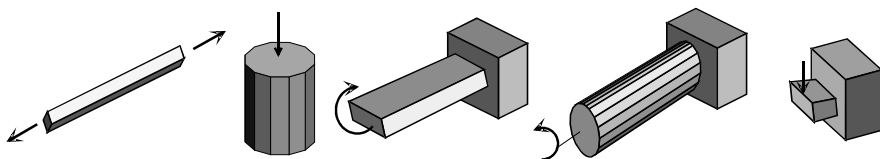
Названието им показва, че вътрешните усилия са също векторни величини, защото освен големина, имат и посока (или знак). Особено важни, както ще видим по нататък, са знаците на нормалната сила и на огъващите моменти. Когато нормалната сила има знак (+) (насочена е по положителната посока на ос  $X$ ), наричаме я **опънова сила**, а при знак (-), я наричаме **натискова сила**.

Често конструкциите са равнинни. Ако приемем, че равнинните конструкции лежат в равнината  $XOZ$ , тогава от шестте разрезни усилия остават да действуват само ония, които са в същата равнина, т.е.  $N$ ,  $Q_z$  и  $M_y$ .

За да определим вътрешните усилия, предварително е необходимо да бъдат определени всички външни сили върху тялото, в това число и опорните реакции. Между външните сили и опорните реакции не бива да се прави никаква разлика.

Когато вътрешните усилия действуват поединично, получаваме следните видове съпротиви – (фиг.1.10, където изобразените сили и моменти предизвикват подобни вътрешни усилия): **Чист опън** – действа само нормалната сила ( $N>0$ ); **Чист натиск** – действа само нормална сила ( $N<0$ ); **Чисто огъване** – действа само огъващ момент; **Чисто усукване** – действа само усукващ момент; **Чисто срязване** – действа само срязваща сила (или ако огъващият момент е много малък). Ако действуват едновременно две или повече разрезни усилия, получаваме **сложно натоварване**.

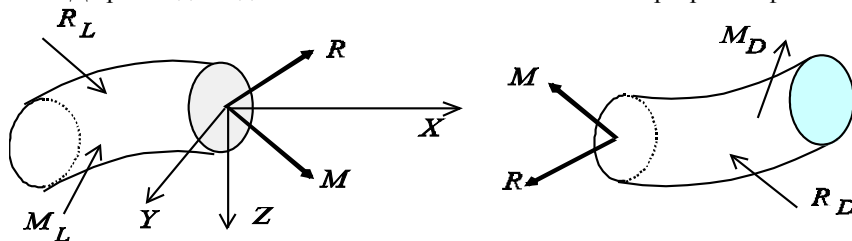
Защо са нужни вътрешните усилия ? Вътрешните усилия са причината за разрушаване на телата. Следователно ние трябва да знаем как са разпределени, къде и колко са техните максимуми.



**Чист опън    Чист натиск    Чисто огъване    Чисто усукване    Чисто срязване**  
**Фиг.1.10. Видове прости съпротиви**

**Б) Определяне на вътрешните усилия чрез метода на предварителната аналитична редукция**

Да разгледаме двете части на тялото от мястото на разреза – фиг.1.11.



**Фиг.1.11. Външни и вътрешни усилия**

Ако означим с  $R_L, M_L$  съответно главният вектор и главният момент на външните сили, действащи върху лявата част, определени спрямо приетата координатна система  $XYZ$ , а с  $R_D, M_D$  – главният вектор и главният момент на външните сили, действащи върху дясната част, за да бъдат в равновесие е необходимо да бъде изпълнено условието:

$$\begin{aligned} R_L + R_D &= 0 \\ M_L + M_D &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

От друга страна, ако едно тяло е в равновесие, то в равновесие е всяка част от него. Поради това, за лявата част на тялото са в сила следните уравнения:

$$\begin{aligned} R_L + R &= 0 \\ M_L + M &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

От 1.3 и 1.2 определяме:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= -\mathbf{R}_L = \mathbf{R}_D \\
 \mathbf{M} &= -\mathbf{M}_L = \mathbf{M}_D
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Всяко от векторните уравнения има по три скаларни уравнения. На основание на 1.1 и 1.4, получаваме:

$$\begin{aligned}
 N &= -R_{L,x} = R_{D,x} & M_x &= -M_{L,x} = M_{D,x} \\
 Q_y &= -R_{L,y} = R_{D,y} & M_y &= -M_{L,y} = M_{D,y} \\
 Q_z &= -R_{L,z} = R_{D,z} & M_z &= -M_{L,z} = M_{D,z}
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

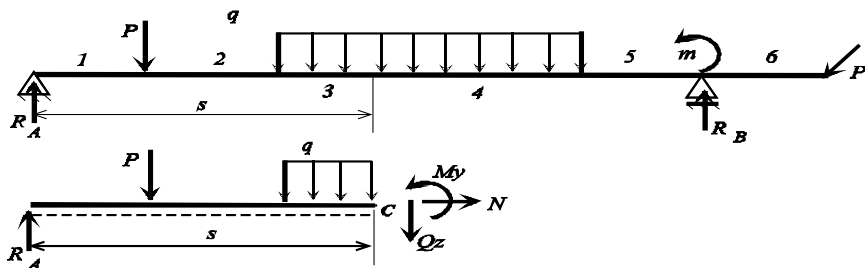
Уравнения 1.5 позволяват да бъдат определени и шестте разрезни усилия и обикновено се използват при пространствени рамки. За равнинни рамки и греди се използва т.н. метод на сечението, който по същество не се различава от вече разгледания, тъй като и при него се записват уравнения 1.5, но по друг начин.

### ***В) Определяне на вътрешните усилия по метода на сечението***

Ще разгледаме гreda със зададено натоварване, на която сме определили предварително опорните реакции – фиг.1.12.. Номерираще силовите участъци. **Силов участък** е част от гредата, в който натоварването не се променя. Граници на силовите участъци са точки, в които действуват сили, моменти, започва или завършва разпределен товар, както и точките в които оста на гредата (рамката) се пречупва. Приемаме т.н. **реперна линия**, която улеснява и опростява рисуването на разрезните усилия. Реперната линия е пунктирна линия, която нанасяме от едната страна на гредата (рамката). **Реперната линия** показва от коя страна на съответния участък е положителната посока на ос  $Z$  (ос  $X$  е винаги по оста на гредата). За греди реперната линия обикновено се взема ‘под гредата’, а за рамки – от вътрешната страна на рамката.

Ако трябва да се определят вътрешните усилия в едно определено сечение на гредата, извършваме разрез в това сечение и означаваме мястото на разреза с текуща координата  $S$  (или  $X$ ) - фиг.1.12. Началото на текущата координата може да се вземе произволно - в левия или десния край на гредата, в левия или десния край на участъка и т.н., крайните резултати не зависят от това. Преценяваме коя част от мястото на разреза е по-просто натоварена (лявата или дясната), след което отделяме тази част от гредата (рамката) и я изобразяваме на отделна схема с всичките действувачи върху нея товари, включително реакциите. Нанасяме търсените разрезни усилия в сечението, като спазваме следните правила: Нормалната сила  $N$  да разпъва реперната линия; Огъващият момент  $M_y$  да огъва гредата така, че реперната линия да се разпъва; Срязващата сила  $Q_z$  да завъртва разглежданата част от гредата (рамката) по часовата стрелка – фиг.1.12.

За така изобразената част от гредата (рамката) написваме уравнения на равновесие, които за равнинна система ще са три на брой, като започваме с търсените разрезни усилия:



Фиг.1.12. Определяне на вътрешните усилия по метода на сечението

$$\begin{aligned}
 N + \sum \text{ Всички сили по ос } X &= 0 \\
 Q_z + \sum \text{ Всички сили по ос } Z &= 0 \\
 M_y + \sum \text{ Всички моменти около ос } Y &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

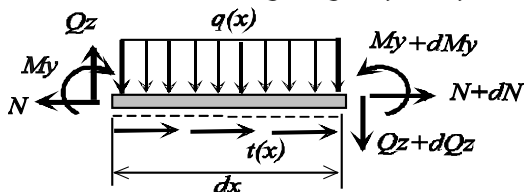
Сумата от моментите в 1.6 се взема спрямо т.С, съвпадаща с центъра на тежестта на сечението.

От уравнения 1.6 се определят търсените разрезни усилия. Тази процедура се повтаря за всеки от участъците.

След определяне на аналитичните изрази на разрезните усилия, се чертаят техните диаграми и се прави проверка за правилността им, което ще разгледаме по-нататък на конкретен пример.

#### 1.4. Диференциални зависимости между разрезните усилия

Да разгледаме безкрайно малък елемент от права греда, натоварен с разпределени напречни сили  $q(x)$  и разпределени надлъжни сили  $t(x)$  – фиг. 1.13. В общият случай от двете страни на елемента разрезните усилия са различни. Ако в лявото сечение те са  $N$ ,  $Q_z$  и  $M_y$ , в дясното сечение те получават нарастване и ще бъдат:  $N+dN$ ,  $Q_z+dQ_z$ ,  $M_y+dM_y$ .



Фиг.1.13. Действащи усилия върху диференциален елемент от права греда

Като запишем трите уравнения за равновесие на елемента, получаваме:

$$\sum X = 0 \rightarrow N + dN - N + t(x).dx = 0$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow Qz + dQz - Qz + q(x).dx = 0$$

$$\sum M = 0 \rightarrow My + dMy - My - Qz.dx + q(x).dx \frac{dx}{2} = 0$$

откъдето пренебрегвайки малкото събираемо  $qdx dx/2$ , получаваме:

$$\frac{dN}{dx} = -t(x) \quad \frac{dQz}{dx} = -q(x) \quad \frac{dMy}{dx} = Qz(x) \quad (1.7)$$

Уравнения 1.7 се наричат **диференциални зависимости на Журавски (1821-1891)**, който пръв ги е получил. Те играят важна роля в Съпротивление на материалите, както ще видим по-нататък.

Аналогично могат да се получат диференциални зависимости и за греди с крива ос - [16]. Доколкото външните товари  $t$  и  $q$  са известни, от уравнения 1.7 след интегриране могат да се получат разрезните усилия:

$$N = - \int t_{(x)} dx + C_1 \quad Qz = - \int q_{(x)} dx + C_2$$

$$My = \int Qz_{(x)} dx + C_3 = - \iint q_{(x)} dx dx + C_2 x + C_3 \quad (1.8)$$

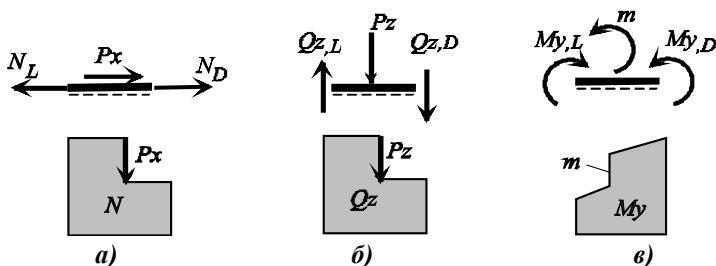
където  $C_1, C_2, C_3$  са интеграционни константи. Те се определят от условията в краищата на участъка.

### 1.5. Проверка на диаграмите на разрезните усилия

Не зависимо по кой метод са получени разрезните усилия, съществуват определени правила, на които те задължително се подчиняват.

#### А) Проверка по скоковете в диаграмите

Нека в дадена точка от гредата да действа осова сила, напречна сила и огъващ момент – фиг. 1.14:



Фиг. 1.14. Съсредоточени товари и скокове в диаграмите

За равновесието на елемента можем да запишем:

$$\begin{aligned} N_D + P_x - N_L &= 0 & \rightarrow & N_L - N_D = P_x \\ Q_{z,D} + P_z - Q_{z,L} &= 0 & \rightarrow & Q_{z,L} - Q_{z,D} = P_z \\ M_{y,D} + m - M_{y,L} &= 0 & \rightarrow & M_{y,L} - M_{y,D} = m \end{aligned} \quad (1.9)$$

Получените зависимости 1.9 следва да се тълкуват така:

Ако в точка от гредата действа съсредоточена осова сила, диаграма  $N$  в тази точка претърпява скок, равен по модул на големината на осовата сила – фиг.1.14-а.

Ако в точка от гредата действа съсредоточена напречна сила, диаграма  $Q_z$  в тази точка претърпява скок, равен по модул на големината на напречната сила – фиг.1.14-б.

Ако в точка от гредата действа съсредоточен момент, диаграма  $M_y$  в тази точка претърпява скок, равен по модул на големината на съсредоточения момент – фиг.1.14-в.

След като се начертаят диаграмите на разрезните усилия, във всички точки, в които действуват някакви съсредоточени сили, следва да се изпълняват зависимости 1.9. Тази проверка се нарича **проверка по скоковете** в диаграмите.

#### **Б) Проверка по вида на функциите**

Друга проверка, която можем да извършим, се основава на диференциалните зависимости на Журавски 1.7. Тези зависимости позволяват да съставим следната таблица:

Табл.1.2

Ако в даден участък	Тогава $Q_z$ е:	Тогава $M_y$ е:
$q = 0$	Константа	Линейна функция
$q = \text{const}$	Линейна функция	Квадратна функция
$q = \text{линейна функция}$	Квадратна функция	Кубична функция

Понеже нулата, константата, линейната и квадратна функции се различават лесно на диаграмите, то проверките съгласно табл.1.2 се извършват бързо. Този вид проверка се нарича **проверка по вида на функциите**.

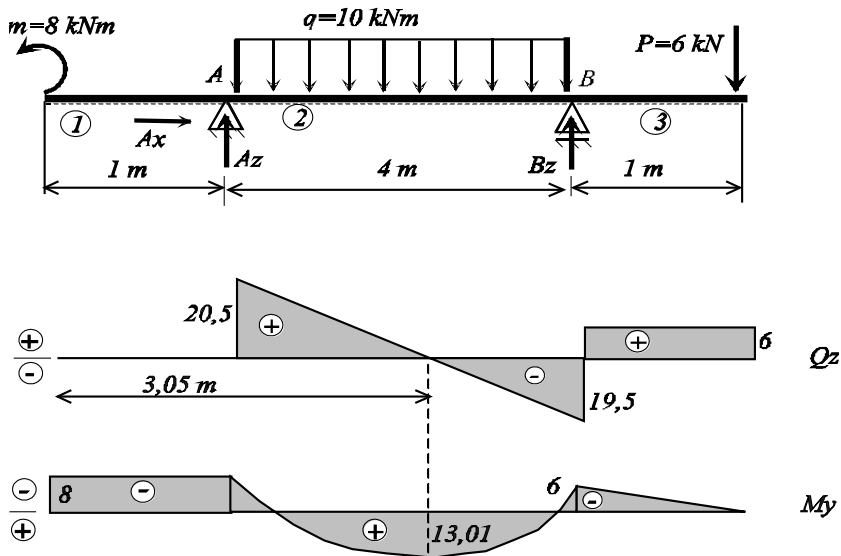
От последното уравнение на 1.7 може още да се заключи още, че ако в дадена точка срязващата сила  $Q_z$  се анулира, в тази точка диаграма  $M_y$  има задължително **екстремум** – **минимум или максимум**. Видът на екстремума се уточнява по знака на втората производна на момента.

Могат да се извършат и други видове проверки, **като проверки за равновесието на възлите, проверки по площи** на диаграмите и други. При

аналитичното решение основни са показаните проверки по скоковете в диаграмите и по вида на функциите.

**Г) Пример 1.1. Определяне на разрезни усилия в праволинейна гредка**

За гредата, с размери и натоварване съгласно схемата, да се определят диаграмите на разрезните усилия



**Фиг.1.15. Разрезни усилия в права гредка**

За решаването на задачата се препоръчва следния ред:

**1. Определяме опорните реакции**

$$\sum X = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_{i,A} = 0 \rightarrow 4B_z + m - 5P - 4q \cdot 2 = 0 \rightarrow B_z = (-8 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 10 \cdot 2) / 4 = 25,5 \text{ kN}$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow -A_z - B_z + P + 4q = 0 \rightarrow A_z = 4q + P - B_z = 40 + 6 - 25,5 = 20,5 \text{ kN}$$

Извършваме проверка за правилността на реакциите, като използваме такова уравнение на статиката, което не е било използвано при определяне на реакциите, например:

$$\sum M_{i,B} = -4A_z + m - P \cdot 1 + 4q \cdot 2 = -4 \cdot 20,5 + 8 - 6 + 4 \cdot 10 \cdot 2 = 0$$

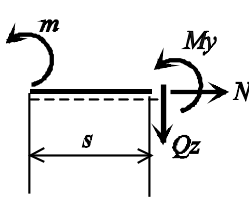
Ако се окаже, че сумата е различна от нула, това означава, че при определянето на опорните реакции сме допуснали грешка. Естествено повтаряме процедурата, докато грешката се отстрани.

**2. Номериране участъците (в случая - три на брой).**

**3. Приемаме реперна линия (показана е с пунктир под гредата).**

4. За всеки от участъците **прилагаме метода на сечението** по схемата: **РОЗУ** – Режем, Отхвърляме, Заменяме, Уравновесяваме.

За първи участък имаме:

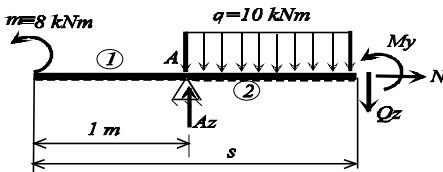


$$\sum X = 0 \rightarrow N = 0$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow Q_z = 0$$

$$\sum M_{i,c} = 0 \rightarrow M_y + m = 0 \rightarrow M_y = -m$$

За втори участък след разреза в участъка приемаме текуща координата  $1 \leq s \leq 5$ . Ще разгледаме равновесието на лявата част от мястото на разреза. Получаваме:



$$\sum X = 0 \rightarrow N = 0$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow Q_z - Az + q \cdot (s - 1) = 0$$

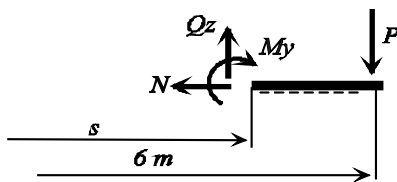
$$Q_z = Az - q \cdot (s - 1) = 20,5 - 10 \cdot (s - 1)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M_y + m - Az(s - 1) + q \frac{(s - 1)^2}{2} = 0$$

$$M_y = -m + Az(s - 1) - q \frac{(s - 1)^2}{2} =$$

$$- 8 + 20,5 \cdot (s - 1) - 5(s - 1)^2$$

За третия участък след разреза разглеждаме дясната част, която е много по-просто натоварена. Текущата координата се изменя в затворения интервал  $5 \leq s \leq 6$ . Получаваме:



$$\sum X = 0 \rightarrow N = 0$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow Q_z - P = 0 \rightarrow$$

$$Q_z = P = 6$$

$$\sum M_{i,c} = 0 \rightarrow M_y + P(6 - s) = 0$$

$$M_y = -P(6 - s) = -6(6 - s)$$

### 5. Построяваме диаграмите на разрезните усилия.

След като сме определили аналитичните изрази на разрезните усилия, построяваме диаграмите им. За целта за улеснение съставяме следната таблица, в която са нанесени разрезните усилия в началото и края на всеки участък.



Участък	1 участък		2 участък		3 участък	
Координата	s=0	s=1	s=1	s=5	s=5	s=6
Qz	0	0	20,5	-19,5	6	6
My	-8	-8	-8	-6	-6	-6

Тъй като във втория участък огъващият момент е парабола, необходимо е да установим дали няма екстремум. За целта решаваме уравнението  $Qz=0$ , откъдето получаваме:

$$Qz = 20,5 - 10(s - 1) = 0 \rightarrow 10s = 30,5 \rightarrow s = 3,05 \text{ m}$$

Координатата  $s=3,05$  попада в границите на втория участък, откъдето следва, че огъващият момент в този участък ще има екстремум.

$$My(s = 3,5) = -8 + 20,5 \cdot 2,05 - 5 \cdot 2,05^2 = 13,01 \text{ kNm}$$

Поради това, че втората производна на момента в тази точка е отрицателна ( $My''=-10$ ), следва, че в точката с координата  $s=3,05 \text{ m}$  огъващият момент ще има максимум.

Диаграмите са начертани под гредата - фиг.1.15. От тях се вижда, че положителните стойности на срязващата сила  $Qz$  се чертаят над реперната линия, а положителните стойности на огъващия момент  $My$  се чертаят под реперната линия. Тъй като нормалната сила навсякъде е нула, за нея в случая не чертаем диаграма.

## 6. Проверка на диаграмите

Извършваме проверка по скоковете и вида на функциите.

Скок в диаграма  $Qz$  следва да се очаква в точките, където има напречни сили –  $Az$ ,  $Bz$  и  $P$ . Скок в моментната диаграма следва да има само в точката, където е приложен момента  $m$ . Големините на скоковете са равни на съответните съсредоточени сили и моменти.

Проверката по вида на функциите означава да проверим дали са изпълнени зависимостите на Журавски – табл.1.2.

Проверките показват, че в случая всички изисквания са изпълнени и следователно задачата може да се счита за правилно решена.

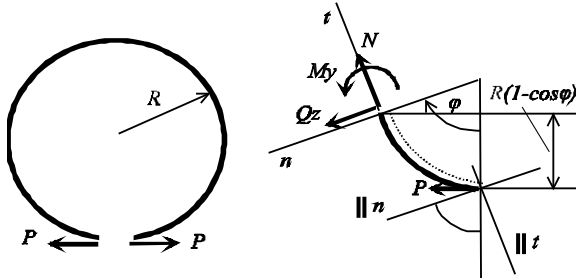
В гл. 18 ще разгледаме числено определяне на разрезните усилия на греди и рамки.

### Д) Пример1.2. Определяне разрезните усилия в криволинейна греда

Крива греда с постоянен радиус на кривина  $R$  е натоварена съгласно схемата. Да се определят диаграмите на разрезните усилия.

Тъй като приложените сили са самоуравновесени, отпада необходимостта от определяне на опорни реакции. Удобно е вместо линейна текуща координата, да се приеме ъглова текуща координата  $\theta \leq$

$\varphi \leq 2\pi$ . Записваме уравненията на равновесие за дъга с големина  $\varphi$  - фиг. 1.16.



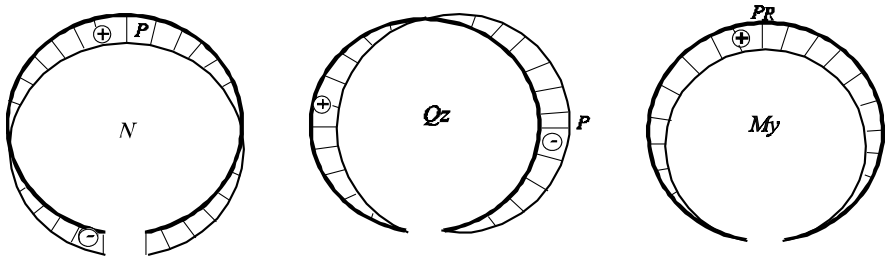
Фиг.1.16. Огъване на крива греда

$$\sum_n \text{ сили} = 0 \rightarrow Q_z - P \sin \varphi = 0 \rightarrow Q_z = P \sin \varphi$$

$$\sum_t \text{ сили} = 0 \rightarrow N + P \cos \varphi = 0 \rightarrow N = -P \cos \varphi$$

$$\sum_C \text{ моменти} = 0 \rightarrow M_y - P(R - R \cos \varphi) = 0 \rightarrow M_y = PR(1 - \cos \varphi)$$

Диаграмите на разрезните усилия са показани на фиг.1.17. Този пример може да бъде отнесен за бутален сегмент на двигател с вътрешно горене, когато се разтваря, за да се постави в канала на буталото.



Фиг.1.17

**Е) Пример 1.3. Определяне на разрезните усилия в рамка**

За рамката с размери и натоварване съгласно фиг.1.18 да се определят диаграмите на разрезните усилия.

1. Определяме опорните реакции:

$$\sum X = 0 \rightarrow -A_x + P = 0 \rightarrow A_x = P = 3 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_z \cdot 1 - P \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0,5 = 0 \rightarrow B_z = P + 0,5q = 7 \text{ kN}$$

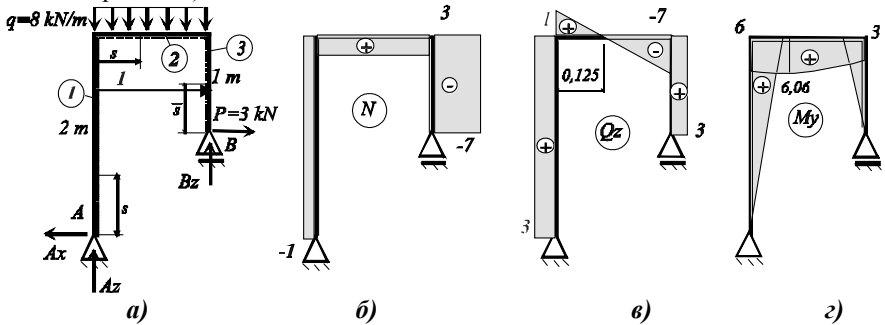
$$\sum Z = 0 \rightarrow -A_z + q \cdot 1 - B_z = 0 \rightarrow A_z = q \cdot 1 - B_z = 1 \text{ kN}$$

Правим проверка с моментно уравнение:

$$\sum M_B = q \cdot 1 \cdot 0,5 - A_x \cdot 1 - A_z \cdot 1 = 4 - 3 - 1 = 0 \quad !$$

1. Номерираще силовите участъци (три на брой)

2. Приемаме реперна линия (обикновено от вътрешната страна на рамката)



Фиг.1.18. Разрезни усилия в рамка

За всеки от участъците прилагаме метода на сечението по схемата РОЗУ (режем, отхвърляме, заменяме, уравновесяваме). След разреза разглеждаме винаги онази част от рамката, която е по-просто натоварена, при което задължително се чертае всичко, което се вижда върху нея.

1 у-к:  $0 \leq s \leq 2$ .

$$\sum X = 0 \rightarrow N + A_z = 0 \rightarrow N = -A_z = -1$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow Q_z - A_x = 0 \rightarrow Q_z = A_x = 3$$

$$\sum M_{i,c} = 0 \rightarrow My - A_x s = 0 \rightarrow My = A_x s = 3s$$

Тук  $X$  и  $Z$  са локалните оси на участъка.

2 у-к:  $0 \leq s \leq 1$ .

$$\sum X = 0 \rightarrow N - A_x = 0 \rightarrow N = A_x = 3$$

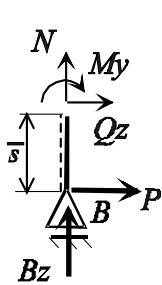
$$\sum Z = 0 \rightarrow Q_z - A_z + qs = 0 \rightarrow Q_z = A_z - qs = 3 - 8s$$

$$\sum M_{i,c} = 0 \rightarrow My - A_z s + \frac{qs^2}{2} = 0 \rightarrow My = A_z s - \frac{qs^2}{2} = 6 + 1 \cdot s - 4s^2$$

3 у-к:  $0 \leq s \leq 1$ .

Разглеждаме дясната част от мястото на разреза като много по-просто натоварена с текуща координата  $s$ .

$s$ .



$$\sum X = 0 \rightarrow N + B_z = 0 \rightarrow N = -B_z = 7$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow Q_z + P = 0 \rightarrow Q_z = -P = -3$$

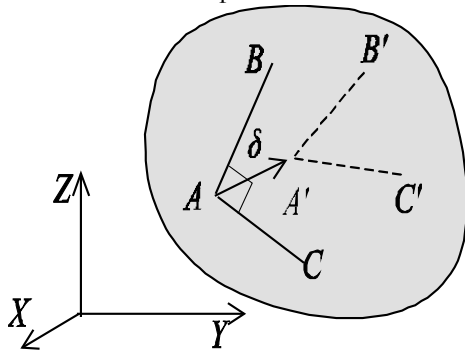
$$\sum M_{i,c} = 0 \rightarrow My - P\bar{s} \rightarrow My = P\bar{s} = 3\bar{s}$$

На основание на така определените аналитични изрази за разрезните усилия са построени техните диаграми фиг.1.18 - б, в и г. Извършваме проверка на диаграмите по скокове и по вида на функциите, с което се убеждаваме в тяхната правилност.

## 1.6. Понятие за премествания, деформации и напрежения

### А) Определение за линейна деформация

Да разгледаме деформируемо тяло, натоварено с уравновесена система от сили – фиг.1.19.



Произволна точка А от тялото след деформирането му се премества в положение А'. Векторът  $AA' = \delta$  наричаме **пълно преместване** на т.А. В координатната система XYZ пълното преместване има по три компоненти, които бележим с  $U$ ,  $V$  и  $W$ , представляващи съответно преместването на т.А по ос  $X$ , по ос  $Y$  и по ос  $Z$ .

Фиг.1.19. Премествания и деформации

$$\delta = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

Да вземем друга точка В, която отстои от т.А на безкрайно малко разстояние  $dr$ . Точка В също се премества и нека нейното положение в деформираното състояние на тялото да бъде В'. При натоварване разстоянието между точките ще се промени. По определение **пълна линейна деформация** ( $\epsilon$ ) в т.А наричаме отношението на удължението/свиването на отсечката АВ към дължината на самата отсечка АВ:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} \Big|_{AB \rightarrow 0} \quad [-] \quad (1.11)$$

Очевидно линейната деформация е безразмерна величина. Може да се измерва също в проценти. При това ако отсечката АВ се удължава, линейната деформация е положителна, а когато се скъсява е отрицателна.

Ако отсечката АВ е насочена по ос  $X$ , деформацията се бележи с  $\varepsilon_x$ . Аналогично деформациите по осите  $y$  и  $z$  бележим с  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ . Или в координатната система  $XYZ$  ще имаме три линейни деформации:

$$\left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \right\} \quad (1.12)$$

### Б) Определение за ъгловата деформация

Нека да разгледаме три точки А, В, С, които са близко една до друга и образуват прав ъгъл – фиг.1.19. В деформирано състояние на тялото нека положението на точките е А', В', С'. По определение **пълна ъглова деформация** ( $\gamma$ ) в околността на т.А в равнината, образувана от отсечките АВ и ВС, наричаме разликата между ъглите ВАС и В'А'С', т.е.:

$$\gamma = \angle BAC - \angle B'A'C' \quad [rad] \quad (1.13)$$

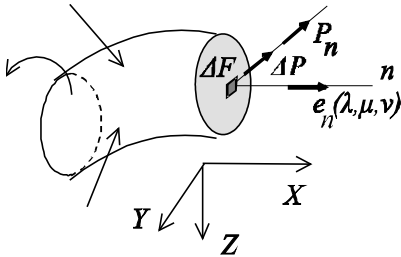
От 1.13 следва, че ако правият ъгъл стане остър, ъгловата деформация е положителна, в противен случай е отрицателна.

Ако равнината на отсечките АВ и ВС съвпадне с равнината XY, ъгловата деформация бележим с  $\gamma_{xy}$ . Аналогично имаме още две ъглови деформации в другите две координатни равнини YZ и ZX. Или в координатната система XYZ ще имаме следните три ъглови деформации:

$$\left\{ \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right\} \quad (1.14)$$

Съвкупността от всички линейни и ъглови деформации 1.12 и 1.14 в дадена точка определят т.н. **деформирано състояние** в околността на точката.

### Г) Определение за механично напрежение



Да разгледаме произволно напречно сечение от натовареното тяло – фиг.1.20. Вече казахме, че при натоварване между частиците на двете

Фиг.1.20. Напрежение по площадка

части на тялото възникват сили, които в общия случай са с неизвестна посока и големина.

Ще вземем една произволна точка от това сечение и площадка, съвпадаща със сечението, с малка площ  $\Delta F$ . Ориентацията на площадката (сечението) се дава с нормалата  $n$  към нея, т.е. с единичния вектор на нормалата  $e(\lambda, \mu, \nu)$ . Нека силата, която действа върху площадката бъде  $\Delta P$ . В общият случай тази сила е в общо положение спрямо площадката. По определение **пълно механично напрежение**  $p_n$  в разглежданата площадка наричаме:

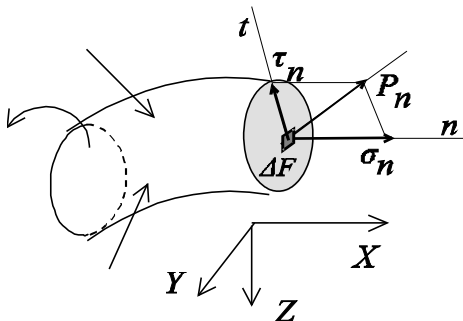
$$p_n = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} \left[ \frac{N}{m^2} \right] \quad (1.15)$$

Така определено, пълното напрежение съвпада с направлението на силата, която го предизвиква. В общият случай то ще зависи както от положението на точката, така и от ориентацията на площадката, минаваща през тази точка, т.е.:

$$p_n = f(x, y, z, \lambda, \mu, \nu) \quad (1.16)$$

#### Д) Нормално и тангенциално напрежение

Направлението на пълното напрежение и нормалата  $n$  образуват равнина, която пресича разглежданото сечение от тялото по правата линия  $t$ , която ще наречем тангента. Винаги можем да разложим пълното напрежение по нормалата и тангентата – фиг. 1.21.



Фиг.1.21. Пълно, нормално и тангенциално напрежение

$$p_n = \sigma_n + \tau_n \quad (1.17)$$

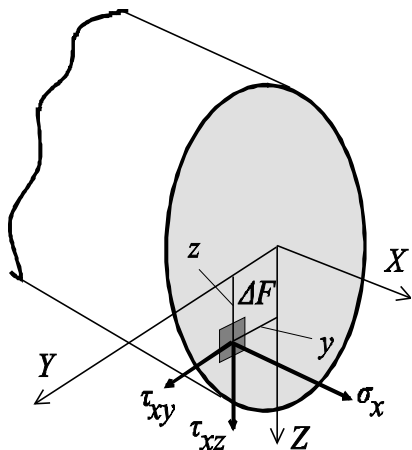
Компонентата на пълното напрежение по нормалата към площадката наричаме **нормално напрежение**, а компонентата, лежаща в площадката, наричаме **тангенциално** (или **срязващо**) напрежение. Нормалното напрежение се бележи с  $\sigma$ , а тангенциалното с  $\tau$ . Нормалното и тангенциалното напрежения имат

определен физически смисъл, докато на пълното напрежение не може да се даде такъв. Нормалното напрежение се опитва да разкъса (когато е положително или **опънovo**) или да смачка (когато е отрицателно или **натисково**) тялото, а тангенциалното напрежение се опитва да среже тялото. По-нататък ние ще работим главно с тези две компоненти.

**Е) Интегрални връзки между разрезните усилия и напреженията.**

Ако разложим пълното напрежение по осите на правоъгълната координатна система  $XYZ$ , в която определяме разрезните усилия – фиг. 1.22, можем да запишем:

$$p_n = \sigma_n + \tau_n = \sigma_x + \tau_{xy} + \tau_{xz} \quad (1.18)$$



Както се вижда от фиг.1.22, индексът на нормалното напрежение и първият индекс на тангенциалното напрежение показват нормалата на площадката, а вторият индекс на тангенциалното напрежение – направлението на действие.

Нормалното напрежение  $\sigma_x$  и двете тангенциални напрежения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$  създават сили и моменти по и около осите на координатната система, които ще се определят както следва:

**Фиг.1.22. Връзка между напреженията и разрезните усилия**

$$\begin{aligned} dN &= \sigma_x dF & \rightarrow & N = \int_F \sigma_x dF \\ dM_y &= dN \cdot z = \sigma_x dF \cdot z & \rightarrow & M_y = \int_F \sigma_x \cdot z dF \\ dM_z &= dN \cdot y = \sigma_x dF \cdot y & \rightarrow & M_z = \int_F \sigma_x \cdot y dF \\ dQ_y &= \tau_{xy} dF & \rightarrow & Q_y = \int_F \tau_{xy} dF \\ dQ_z &= \tau_{xz} dF & \rightarrow & Q_z = \int_F \tau_{xz} dF \\ dM_x &= -\tau_{xy} z dF + \tau_{xz} y dF & \rightarrow & M_x = \int_F (\tau_{xz} z - \tau_{xy} y) dF \end{aligned} \quad (1.19)$$

Уравнения 1.19 ще бъдат използвани по-нататък за определяне на напреженията.

## 1. Закон на Хук и някои общи принципи и хипотези

### А) Закон на Хук

През 1678 г. англичанинът **Роберт Хук** (1635-1703) публикувал своя статия, в която описва резултатите от изпитването на цилиндрични пружини на опън. (По онова време в Англия се е развило силно производството на механични часовници, движени от пружини.) Той забелязал, че удължението на пружината е пропорционално на приложената сила и формулирал това на латински във вида: “*Ut tensio sic vis*” – “Каквото е удължението, такава е и силата”.

Тази пропорционалност между сила и деформация, открита за пръв път от Хук, се забелязва при всички видове товари – при опън, натиск, усукване и огъване и при много материали в началния стадий на натоварване.

Докато Роберт Хук е считал, че пропорционалността между сила и удължение е свойство на телата, друг англичанин – **Томас Юнг** (1773-1829) доказал, че тази закономерност е свойство на материала, от който те са направени. Пропорционалността между приложените сили и получените удължения за нишка при изпитание на опън днес записваме във вида:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.20)$$

където величината  $E$ , зависи само от вида на материала, наричаме **модул на еластичност**. Днес формула 1.20 в чест на двамата откриватели се нарича **закон на Хук**, а модула на еластичност  $E$  – **модул на Юнг**. Законът на Хук (1.20) има същото значение за Съпротивление на материалите, както законът на **Нютон** ( $F=ma$ ) в Теоретичната механика и законът на **Ом** ( $U=RI$ ) в Електротехниката.

Аналогично съществува пропорционалност между напреженията на срязване и получените ъглови деформации. Тя се записва във вида:

$$\tau = G\gamma \quad (1.21)$$

където  $G$  – модул на еластичност при ъглови деформации (или **модул на еластичност от II род**), зависещ също само от материала. Както ще видим в гл.6, между модулите  $E$  и  $G$  за даден материал съществува определена връзка.

От формули 1.20, 1.21 се вижда, че модулите на еластичност имат размерност на напрежение –  $N/m^2$ . Ако в 1.20 положим  $\varepsilon = 1$ , тогава  $E = \sigma$ , т.е., модулът на еластичност е онова теоретично напрежение, което се получава в материала, ако бихме могли да го удължим два пъти ( $\varepsilon = 1$  означава, че удължението на елементарна отсечка АВ е равно на самата отсечка – виж формула 1.11). За стомана модулът на еластичност е средно



$E=2.10^{11} \text{ N/m}^2$ . Модулите на еластичност за различни материали са приведени в приложение 1.

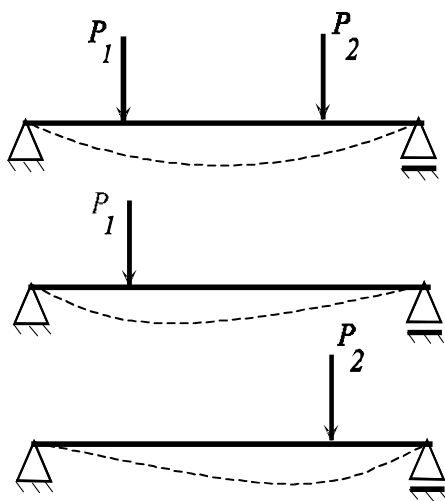
Названието на модула на еластичност изразява еластичните свойства на материала, но е подвеждащо. Например модула на еластичността на гумата е много по-малък от модула на еластичността на стоманата (виж Приложение 1), затова колкото е по-нееластичен (или по-корав) даден материал, толкова неговият модул на еластичност е по-голям

### **Б) Принцип на суперпозицията**

Да разгледаме гредата на две опори с приложени върху и две сили –  $P_1$  и  $P_2$  – фиг.1.22.

Под действието на всяка от силите произволна точка  $K$  получава преместване:  $\delta_{k,1}$  от силата  $P_1$  и  $\delta_{k,2}$  – от силата  $P_2$ . Съгласно **принципа на суперпозицията** (или **принципа за независимото действие на силите**), пълното преместване на т.К е равно на:

$$\delta_k = \delta_{k,1} + \delta_{k,2} \quad (1.22)$$



**Фиг.1.22. Принцип на суперпозицията**

Принципът на суперпозицията гласи: Преместването, което получава произволна точка на едно деформируемо тяло под действието на произволна система от сили е равно на сумата от преместванията, която точката получава от всяка сила поотделно. При това редът на прилагането на силите е без значение.

Този принцип може да се приложи не само за преместванията, но и за завъртванията, за вътрешните усилия, за напреженията и реакциите. Той е особено полезен, когато е необходимо да се определят указаните величини за система, за която познаваме търсените величини поотделно от всеки товар – например от таблици.

В принципа на суперпозицията стои предположението, че зависимостта между силите и преместванията е линейна, т.е., валиден е законът на Хук. Ето защо когато зависимостта между напрежения и деформации е нелинейна, принципът на суперпозицията е неприложим.

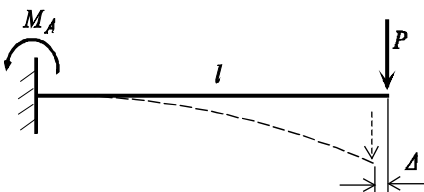
### В) Принцип на началните размери

Да разгледаме конзолно закрепената греда, натоварена със силата  $P$  в края – фиг.1.23.

При деформиране на гредата дължината и се запазва и за да има огънатата греда същата дължина, т.В се премества наляво на разстояние  $\Delta$ . В деформирано състояние на гредата за огъващият момент в запънатия край би следвало да запишем:  $M_A = P(l - \Delta)$ .

**Принципът на началните размери** гласи: При съставяне на уравнения на статиката деформациите на тялото се пренебрегват, т.е. то има същите размери, както в началото, при ненатоварено състояние. На основание на този принцип огъващият момент в т.В за примера ще бъде

$M_A = P \cdot l$  ! Принципът на началните размери се нарича още **принцип на втвърдяването**.

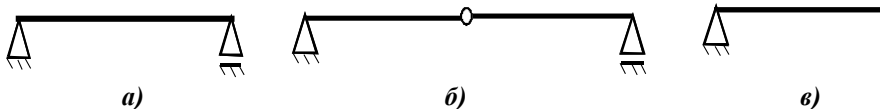


Фиг.1.23. Принцип на началните размери

Принципът на началните размери има място само при **малки премествания**, не по-големи от 5% от максималните размери на тялото и **малки завъртвания**, не по-големи от 5 градуса. В тези случаи може да се приеме, че  $\sin(\theta) \approx \theta$ ,  $\cos(\theta) \approx 1$ ,  $\tan(\theta) \approx \theta$ ,

където  $\theta$  - ъгъл на завъртане на елементарна отсечка вследствие деформирането на тялото. Наистина при  $\theta = 5^\circ = 0,087266 \text{ рад}$  получаваме:  $\sin(\theta) = 0,087155$ ,  $\tan(\theta) = 0,087488$ ,  $\cos(\theta) = 0,99619$ , т.е. имаме абсолютна грешка не по-голяма от  $0,004$ .

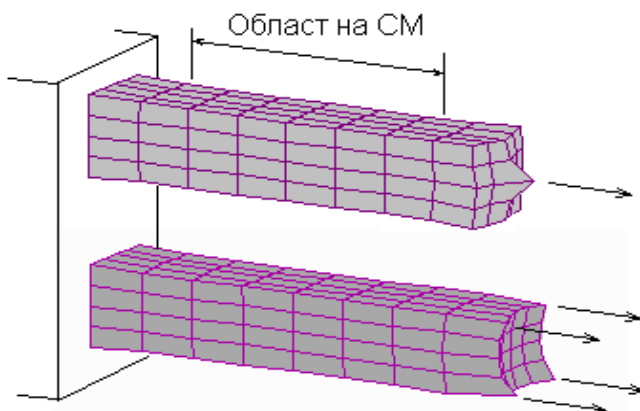
Принципът на началните размери обаче не може да се приеме при **мигновено кинематично-изменяеми системи**, дори преместванията да са малки. Мигновено кинематично изменяеми системи са тези, при които е възможно малко преместване без тялото да се деформира – фиг.1.24 -б. Предмет на изследване на Съпротивление на материалите са предимно **неизменяемите системи**, т.е. онези, при които преместване е възможно само след деформирането им – фиг.1.24 – а. **Кинематично изменяемите системи** – фиг.1.24-в ( при които е възможно движение без деформиране) са предмет на изследване от Теоретичната механика и Теорията на машините и механизмите.



Фиг. 1.24. **Неизменяема (а), мигновено изменяема (б) и кинематично изменяема (в) системи.**

### **Г) Принцип на Сен Венан**

Местата на предаването на товарите и закрепванията в изчислителната схема означаваме със сили, моменти, опори и т.н – фиг.1.4, фиг.1.5, но практическото реализиране на товарите и закрепванията може да стане по най-различен начин. И при най-простата задача – центрично опънат прът, опъновата сила може да бъде приложена в центъра на пръта, а може да бъде равномерно разпределена в няколко точки по периферията на сечението. Ако задачата бъде решена точно, ние ще получим картините на деформациите, подобни на тези, показани на фиг.1.25 Показаните картини (силно увеличени деформации) са получени с помощта на програмния пакет СДАН – [17].



**Фиг.1.25. Илюстрация на принципа на Сен Венан**

Според **принципа на Сен Венан** (1797-1886), една система от сили винаги може да бъде заменена от друга, еквивалентна система от сили, при което напрегнатото състояние на тялото се променя на разстояние, не по-голямо от характерния размер на тялото в тази област.

Този принцип се илюстрира добре от примера на фиг.1.25, където се вижда, че има област от тялото, където начинът на създаването на товара и закрепването не влияе върху деформациите му – това е областта от пръта, отдалечена от краищата на разстояние, приблизително равно на дебелината му. В Съпротивление на материалите ще игнорираме местата на закрепване и прилагане на товарите. Точните решения показват, че в повечето случаи те не са най-опасните места, но това не е общо правило. Практическото изпълнение на създаването на товарите може да се извърши чрез различни конструкторски решения, но винаги предаването на опънова сила представлява определен практически проблем.

В някои случаи принципът на Сен Венан е неприменим. Те ще бъдат специално показани.

#### ***Д) Хипотези на Бернули и Кирхоф***

Според **хипотезата на Бернули** (1667-1748) всяко напречно сечение на греда, равнинно преди натоварването, остава равнинно и след натоварването. Тази хипотеза се потвърждава от опита при чистите съпротиви опън, натиск и огъване на греди с произволно напречно сечение и при усукване на кръгли пръти. Хипотезата на Бернули се нарича още **хипотеза за равнинните сечения**.

Според **хипотезата на Кирхоф** (1824-1887), точките, лежащи на нормалата към средната повърхнина на черупката (плочата) преди натоварването остават да лежат върху нея и след натоварването. Хипотезата на Кирхоф за черупки и плочи се явява аналог на хипотезата на Бернули за греди.

Има случаи, когато тези хипотези не се потвърждават от опита. Тези случаи ще бъдат специално разгледани.

### **1.8. Методи за изчисление на конструкциите**

Съществуват няколко метода за оразмеряване на отделни детайли или конструкции. Кой от методите ще използваме, зависи от вида на конструкцията, характера на натоварването и се определя за всеки конкретен случай отделно.

#### ***А) Оразмеряване по допустими напрежения***

При този метод е необходимо да определим максималните нормални и тангенциални напрежения в изследвания обект и да ги сравним с допустимите напрежения, които се предписват за използвания материал. Условието за оразмеряване е:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad \tau_{\max} \leq [\tau] \quad (1.23)$$

където  $[\sigma]$ ,  $[\tau]$  – допустими нормални и тангенциални напрежения, които се избират от справочници (виж също приложение 2).

#### ***Б) Оразмеряване по максимални премествания и завъртвания***

Този метод е аналогичен на предходния, но се търсят максималните премествания и завъртвания. Условието за оразмеряване е:

$$\delta_{\max} \leq [\delta] \quad \theta_{\max} \leq [\theta] \quad (1.24)$$

За допустимите стойности на преместванията и завъртванията  $[\delta]$ ,  $[\theta]$  съществуват норми, предписани в съответни правилници.

#### ***В) Оразмеряване на устойчивост***

Както ще видим по-нататък, някои конструкции при натоварване на натиск могат да загубят първоначална си форма на равновесие и да получат големи деформации при относително ниски напрежения. Това явление се нарича загуба на устойчивост и ще бъде подробно разгледано в гл. 11. Основното уравнение за оразмеряване на такива конструкции е:

(1.25)

$$P_{\max} \leq \frac{P_{кр}}{n_{уст}}$$

където  $P_{кр}$  е силата, при която конструкцията загубва устойчивост, а  $n_{уст}$  е коефициент на сигурност, който се приема ( $n_{уст} > 1$ ).

### **Г) Оразмеряване по разрушаващо натоварване**

В този случай уравнението за оразмеряване има вида:

$$P_{\max} \leq P_{зр} \quad (1.26)$$

където  $P_{зр}$  е силата, при която се изчерпва изцяло носещата способност на конструкцията.

Този метод на оразмеряване води до най-ефективни решения, но може да се приложи само за по-прости конструкции. Някои прости задачи са разгледани в гл. 14.

### **Д) Оразмеряване при циклични напрежения**

Циклични напрежения са напрежения, които се повтарят във времето по един и същи закон. Те обикновено възникват при въртящи се части на машините. Оразмеряването на циклично натоварени детайли в Съпротивление на материалите се свежда до определяне на коефициента на сигурност по определена методика. Подробно това ще бъде разгледано в гл. 15.

### **Е) Оразмеряване при динамични товари**

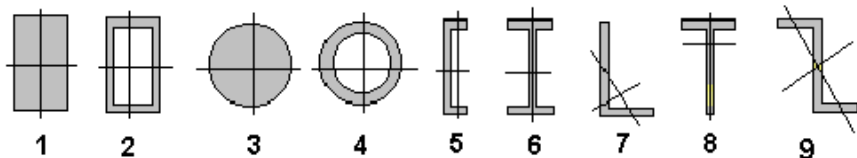
Ако външните товари се изменят във времето по определен закон, в конструкцията са възможни резонансни явления, при които преместванията и свързаните с тях напрежения и реакции се увеличават силно. Една от основните задачи тук е да се определят т.н. собствени честоти на конструкцията и да се сравнят с честотите на възбуждане. Необходимо е да сме сигурни, че в работния диапазон честотите на възбуждане няма да съвпадат със собствените честоти. Някои динамични проблеми са разгледани в гл.16.

## **Гл.2. ГЕОМЕТРИЧНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА РАВНИННИ ФИГУРИ**

В Съпротивление на материалите основен обект на анализ са прътовите конструкции. Всеки прът може да има произволна форма на напречното сечение. При натоварване на пръта на опън-натиск, усукване и огъване за определянето на напреженията и деформациите в пръта са необходими определени числови характеристики, които зависят единствено

от формата на напречното сечение на пръта като: площ, статични моменти, инерционни моменти и др., които наричаме геометрични характеристики.

В машиностроенето и в строителството се използват определен брой **стандартни профили**, някои от които са показани на фиг.2.1. Геометрични характеристики за тези профили могат да се намерят в съответните справочници, например [8], [12] и др. Често обаче прътите са с много по-сложни профили - например сечението на една турбинна лопатка. В областта на преработката на алуминий се произвеждат над 2000 различни профила. Определянето на геометричните характеристики в тези случаи, ако се извършва аналитично, е една доста сложна задача. Ще разгледаме основните моменти от решението на тази задача.



**Фиг.2.1. Стандартни профили**

## 2.1. Статични моменти. Център на тежест.

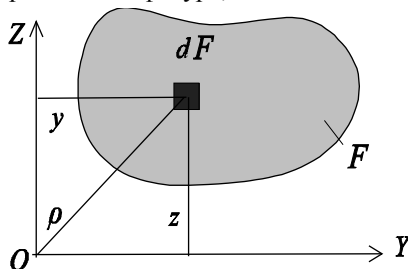
### А) Площ на фигура

Площта на произволна фигура се получава чрез сумиране на всички елементарни площи:

$$F = \int_F dF \quad (2.1)$$

Както е известно, за прости фигури, като правоъгълник, триъгълник, кръг и други, площта се определя с точни формули, но за една произволна фигура, като тази на фиг.2.2, задачата не е съвсем лека. В недалечното минало за решаването на тази задача се произвеждаха специални механизми – планиметри.

Днес тази задача, както и всички, които ще разгледаме по-долу, се решава лесно с компютри. Това ще бъде разгледано по-подробно в гл.18.



**Фиг.2.2**

Нека да разгледаме произволно сечение и координатна система  $YZ$ , лежаща в същото сечение – фиг.2.2. Както вече приехме в гл.1 ще считаме, че ос  $X$  е по оста на пръта, а в напречното сечение са осите  $Y$  и  $Z$ .

Геометричните характеристики не зависят от избора на координатната система, така, че можем да насочим осите  $Y$  и  $Z$  по показания естествен начин.

По определение **статични моменти**  $S_y$  и  $S_z$  около осите  $Y$  и  $Z$  са определените интеграли:

$$S_y = \int_F z dF, \quad S_z = \int_F y dF \quad (2.2)$$

където интегрирането се извършва по площта  $F$  на сечението,  $y$  и  $z$  са разстоянията до елементарната площ  $dF$ .

Така изчислените статични моменти са числа с размерност  $[m^3]$ , които могат да приемат положителни и отрицателни стойности, както и нула, което зависи от положението на координатната система  $YZ$  спрямо фигурата.

### В) Връзка между статичните моменти при успоредно пренасяне на осите

Да разгледаме същата фигура, показана на фиг.2.3. Да предположим, че знаем статичните моменти  $S_y$  и  $S_z$  спрямо координатната система  $YZ$ . Поставяме задачата да определим статичните моменти спрямо новата координатна система  $Y_1Z_1$ , която е паралелна на  $YZ$ , като разстоянията  $a$  и  $b$  са известни.

От фиг. 2.3 се вижда следната връзка между координатите:

$$\begin{aligned} y_1 &= y - a \\ z_1 &= z - b \end{aligned} \quad (2.3)$$

Като използваме определението за статични моменти от 2.2 и съотношенията 2.3, за новата координатна система ще получим:

$$S_{y_1} = \int_F z_1 dF = \int_F z dF - b \int_F dF = S_y - bF$$

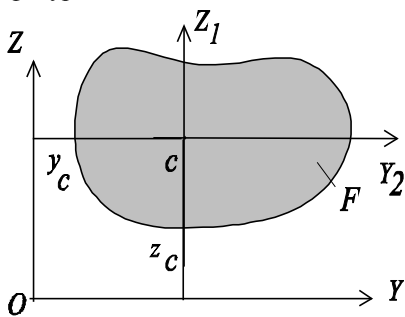
Аналогично ще получим статичния момент  $S_{z_1}$ . Или за двата момента получаваме:

$$\begin{aligned} S_{y1} &= S_y - bF \\ S_{z1} &= S_z - aF \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнения 2.4 дават връзката между статичните моменти в двете координатни системи.

### Г) Център на тежестта

От уравнения 2.4 се вижда, че разстоянията  $a$  и  $b$  винаги могат да бъдат избрани така, че статичните моменти спрямо новата координатна система  $Y_1Z_1$  да са нула. Когато статичните моменти са нула, съответните оси се наричат **централни оси**, т.е. те минават през **центъра на тежестта** на фигурата.



Фиг.2.4

Ако в уравнения 2.4 положим левите части равни на нула, за координатите  $a$  и  $b$ , които в този случай ще бъдат координатите на центъра на тежестта спрямо първоначалната координатна система  $YZ$  - фиг.2.4, ще получим:

$$\begin{aligned} a &= y_c = \frac{S_z}{F} \\ b &= z_c = \frac{S_y}{F} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Определянето на центъра на тежестта на сечението е задължителен етап от общата задача за геометричните характеристики. При решаването на тази задача трябва да се има предвид, че ако фигурата има ос на симетрия, то центъра на тежестта лежи задължително върху тази ос. На това основание ние знаем положението на центъра на тежестта на кръг, на правоъгълник и на други фигури с оси на симетрия.

Ако знаем положението на центъра на тежестта на една фигура и нейната площ, тогава лесно могат да се определят и статичните моменти. От уравнения 2.5 следва, че в този случай:

$$\begin{aligned} S_y &= Fz_c \\ S_z &= Fy_c \end{aligned} \quad (2.6)$$

Последните две уравнения се използват (вместо уравненията 2.2), когато една сложна фигура може да се разложи на  $n$  прости фигури, за всяка от които познаваме площите и центровете на тежест. Тогава центърът на тежестта на сложната фигура ще има координати:



$$y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\sum_{i=1-n} F_i y_{c,i}}{\sum_{i=1-n} F_i} \quad z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1-n} F_i z_{c,i}}{\sum_{i=1-n} F_i} \quad (2.7)$$

Важно е да отбележим, че при използването на формули 2.7 координатите  $Y_c$  и  $Z_c$  се вземат със съответния алгебричен знак.

## 2.2. Инерционни моменти. Инерционни радиуси.

### А) Определения

В Съпротивление на материалите се дефинират следните инерционни моменти (виж фиг.2.2):

$$I_y = \int_F z^2 dF, \quad I_z = \int_F y^2 dF, \quad I_{yz} = \int_F yz dF, \quad I_o = \int_F \rho^2 dF \quad (2.8)$$

Тук моментите  $I_y$  и  $I_z$  се наричат **осови** инерционни моменти, моментът  $I_{yz}$  – **центробежен** (или **смесен**) инерционен момент, а моментът  $I_o$  – **полярен** инерционен момент (може да се означа още с  $I_p, I_c$ ).

Понятието “инерционен момент” се използва по аналогия с инерционните моменти на тяло, които се въвеждат в динамиката на тела. Разликата между инерционните моменти на фигури и на тела се състои само в диференциалния елемент в интегралите 2.8. Тук диференциалния елемент е елементарна площ -  $dF$ , докато при инерционните моменти на тела диференциалният елемент е елементарна маса –  $dm$ . Тук интегрирането е по площта на фигурата  $F$ , докато при масовите инерционни моменти интегрирането е по обема на тялото  $V$ .

От анализа на формули 2.8 може да се заключи, че дименсиите на всички инерционни моменти са  $[m^4]$ . Осовите инерционни моменти  $I_y$  и  $I_z$  и полярният инерционен момент  $I_o$  са винаги положителни числа, докато центробежният инерционен момент  $I_{yz}$  според взаимното положение на координатната система и фигурата може да бъде положителен, отрицателен или нула. Когато центробежният момент е нула, съответните оси се наричат **главни инерционни оси**. Ако при това те минават през центъра на тежестта на фигурата, осите се наричат **главни централни оси**. Една от основните задачи в този раздел е определяне положението на главните централни оси и значенията на осовите инерционни моменти спрямо тях, които в този случай се наричат **главни инерционни моменти**. Това ще направим по-долу.

**Ако една фигура има ос на симетрия, то тя задължително се явява главна централна инерционна ос.** Това е така, защото в този случай центробежният момент на едната половина на фигурата е винаги равен на

центробежния момент на другата половина, но с обратен знак, при което общата им сума ще е нула. Другата главна централна ос на инерция е перпендикулярна на първата и минава през центъра на тежестта. Такива са случаите за стандартни профили с номера 1÷6 и 8 от фиг.2.1.

Очевидно, ако фигурата има две оси на симетрия, те се явяват главни централни оси. Такива са случаите за стандартните профили с номера 1÷4 и 6 от фиг.2.1.

Ако фигурата няма оси на симетрия (профили 7 и 9 от фиг.2.1), определянето на главните оси на инерция е по-трудна задача, която ще разгледаме по-долу в раздел 2.8.

Важно е също да се отбележи, че:

$$I_0 = \int_F \rho^2 dF = \int_F (y^2 + z^2) dF = \int_F y^2 dF + \int_F z^2 dF = I_z + I_y \quad (2.9)$$

т.е., сумата от двата осови инерционни момента е винаги равен на полярния инерционен момент. Естествено тук става дума за една и съща координатна система.

Понякога вместо инерционните моменти  $I_y$ ,  $I_z$  и  $I_p$  за дадена фигура е по-удобно да се работи с **инерционните радиуси**, които са свързани със съответните моменти съгласно следните изрази:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}, \quad i_p = \sqrt{\frac{I_p}{F}}. \quad (2.10)$$

Така дефинирани, инерционните радиуси имат размерност на дължина. Например инерционните радиуси на стандартните профили варират ориентировъчно в диапазона от 1 до 30 см.

### ***Б) Връзка между инерционните моменти при успоредно пренасяне на осите***

Нека сме определили инерционните моменти  $I_y$ ,  $I_z$  и  $I_{yz}$  спрямо произволна координатна система  $YZ$  на фигурата – фиг.2.3. Търсим инерционните моменти спрямо нова координатна система  $Y_1Z_1$ , която е отместена спрямо  $YZ$  паралелно на разстояния  $a$  и  $b$ .

На основание на определенията за инерционни моменти 2.8 и връзката между координатите 2.3 можем да запишем: (2.11)

$$I_{y_1} = \int_F z_1^2 dF = \int_F (z - b)^2 dF = \int_F z^2 dF - 2b \int_F z dF + b^2 \int_F dF = I_y - 2bS_y + b^2 F$$

По същия начин определяме инерционните моменти  $I_z$  и  $I_{yz}$ . В резултат получаваме:

$$\begin{aligned}
 I_{y1} &= I_y - 2bS_y + b^2F \\
 I_{z1} &= I_z - 2aS_z + a^2F \\
 I_{y1z1} &= I_{yz} - aS_y - bS_z + abF
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Ако предположим, че координатната система  $YZ$  е централна, тогава  $S_y=0$  и  $S_z=0$ . От 2.12 ще получим:

$$\begin{aligned}
 I_{y1} &= I_y + b^2F \\
 I_{z1} &= I_z + a^2F \\
 I_{y1z1} &= I_{yz} + abF
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

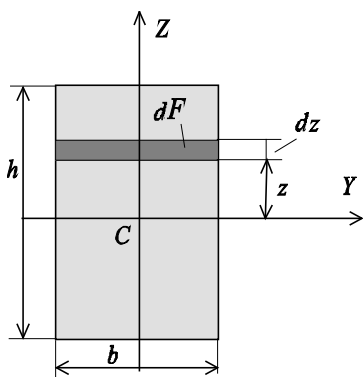
Формули 2.12 и 2.13 са известни като **теорема на Щайнер**. Формули 2.13 имат по-често практическо приложение. При прилагането им разстоянията  $a$  и  $b$  следва да се заместват с техния алгебричен знак (!), който се определя спрямо координатната система  $YZ$ .

### В) Геометрични характеристики на някои основни фигури

Ще определим геометричните характеристики на няколко прости фигури, които се използват много често като съставни фигури на по-сложни профили.

#### В.1) Инерционни моменти на правоъгълник

Да определим инерционните моменти спрямо осите на симетрия на правоъгълника с размери  $b/h$ , показан на фиг. 2.5.



$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_F z^2 dF = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 b dz = b \left. \frac{z^3}{3} \right|_{-h/2}^{h/2} = \\
 &= \frac{bh^3}{24} + \frac{bh^3}{24} = \frac{bh^3}{12}
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

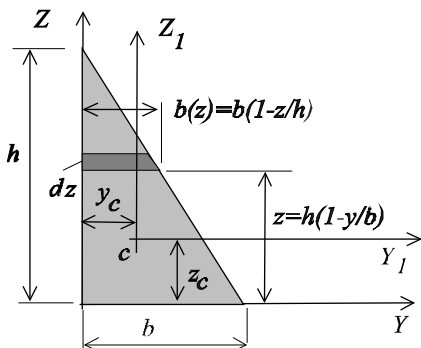
Или за осите на симетрия на правоъгълника, които се явяват и главни централни оси, получаваме:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad I_z = \frac{hb^3}{12}
 \tag{2.15}$$

Фиг. 2.5.

## В.2) Инерционни моменти на правоъгълен триъгълник

Най-напред ще определим положението на центъра на тежестта на триъгълника с катети  $b$  и  $h$  – фиг.2.6.



Фиг. 2.6

Статичният момент спрямо ос  $y$  ще бъде:

$$S_y = \int_F z dF = \int_0^h z b \left(1 - \frac{z}{h}\right) dz = \left[ \frac{bz^2}{2} - \frac{b}{h} \frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^2}{6}$$

На основание на формули 2.5 координатите на центъра на тежестта ще бъдат:

$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{bh^2/2}{bh} = \frac{h}{3} \quad \text{аналогично} \quad y_c = \frac{b}{3}$$

На основание на формули 2.8 получаваме инерционния момент на триъгълника спрямо катетите му:

$$I_y = \int_F z^2 dF = \int_0^h z^2 b \left(1 - \frac{z}{h}\right) dz = \dots = \frac{bh^3}{12}, \quad \text{аналогично} \quad I_z = \frac{hb^3}{12} \quad (2.16)$$

Чрез уравнения 2.13 можем да запишем:

$$I_y = I_{y1} + z_c^2 \cdot F \quad \text{или} \quad \frac{bh^3}{12} = I_{y1} + \left(\frac{b}{3}\right)^2 \frac{bh}{2}$$

От тук определяме моментите на триъгълника спрямо централните му оси:

$$I_{y1} = \frac{bh^3}{36}. \quad \text{Аналогично} \quad I_{z1} = \frac{hb^3}{36}. \quad (2.17)$$

Малко по-сложно се определя центробежния момент. При решаването на определения интеграл от две функции ще забележим, че границите на изменение на едната координата (например  $Z$ ) е променлива. Имаме:

$$I_{yz} = \int_F yz dF = \int_0^b y \left( \int_0^{h(1-\frac{y}{b})} z dz \right) dy = \int_0^b \left( y \frac{z^2}{2} \Big|_0^{h(1-\frac{y}{b})} \right) dy =$$

$$= \int_0^b y \frac{h^2 \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2}{2} dy = \dots = \frac{b^2 h^2}{24}$$

Чрез теоремите на Щайнер 2.13 записваме:

$$I_{yz} = I_{y_1z_1} + (-y_c)(-z_c)F \quad \text{или} \quad \frac{b^2 h^2}{24} = I_{y_1z_1} + \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{bh}{2}$$

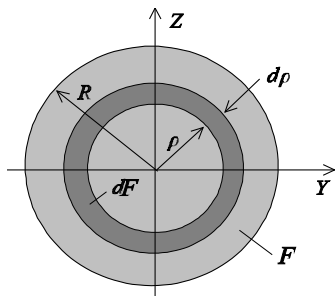
От тук определяме:

$$I_{y_1z_1} = \frac{b^2 h^2}{72} \quad (2.18)$$

При друго разположение на осите спрямо триъгълника е възможно центробежният момент, определен с формула 2.18 да бъде отрицателен.

### В.3) Инерционни моменти на кръг

В този случай по-удобно е най-напред да се определи полярния инерционен момент. Като използваме 2.8 и фиг.2.7, получаваме:



Фиг.2.7

$$I_0 = \int_F \rho^2 dF = \int_0^R \rho^2 2\pi \rho d\rho = \frac{\pi R^4}{2} =$$

$$= \frac{\pi D^4}{32}$$

(2.19)

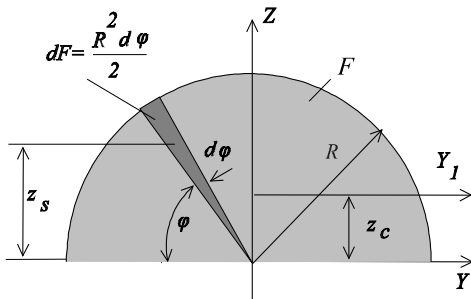
Като вземем предвид симетрията на кръга и правилото 2.9, за осовите инерционни моменти на кръга ще получим:

$$I_{y'} = I_{z'} = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi D^4}{64} \quad (2.20)$$

### В.4) Инерционни моменти на полукръг

За определяне на центъра на тежестта на полукръга в качеството на елементарна площ е удобно да се разгледа елементарен сектор с ъгъл  $d\varphi$  - фиг.2.8. Елементарният статичен момент на сектора ще бъде:

$$dS_y = dF \cdot z_s = \frac{R^2 d\varphi}{2} \cdot \frac{2}{3} R \sin \varphi = \frac{R^3}{3} \sin \varphi d\varphi$$



Фиг.2.8

Целият статичен момент ще получим, като интегрираме по ъгъла в границите  $0-\pi$ :

$$S_y = \int_F dS_y = \int_0^{\pi} \frac{R^3}{3} \sin \varphi d\varphi = \dots = \frac{2}{3} R^3$$

От тук центъра на тежестта ще има координата  $Z$  както следва:

$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{2R^3}{3} \frac{2}{\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi} = 0.424R \quad (2.21)$$

За определяне на инерционните моменти на полукръга спрямо осите  $YZ$  ще се възползуваме от вече известни факти за кръга:

$$I_p = \frac{1}{2} \frac{\pi D^4}{32}, \quad I_z = \frac{1}{2} \frac{\pi D^4}{64}, \quad I_y = I_p - I_z$$

откъдето определяме:

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{128} = \frac{\pi R^4}{8} \quad (2.22)$$

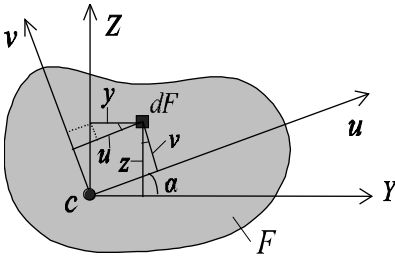
С помощта на теоремата на Щайнер определяме:

$$I_{y1} = I_y - z_c^2 F = \frac{\pi R^4}{8} - (0.424R)^2 \frac{\pi R^2}{2} = 0.11R^4 \quad (2.23)$$

Инерционните моменти на други прости фигури като елипса, шестостен, сектор, сегмент и др. могат да се намерят в справочниците [8], [12] и др.

### 2.3. Връзка между инерционните моменти при завъртване на координатната система

Ще решим следната задача: Дадени са инерционни моменти  $I_y$ ,  $I_z$  и  $I_{yz}$  на фигурата спрямо една произволна централна координатна система  $YZ$ . Дадена е друга централна координатна система  $UV$ , завъртяна спрямо  $YZ$  на известен ъгъл  $\alpha$  - фиг.2.9 (ъгълът се счита за положителен, когато е в посока, обратна на движението на часовата стрелка). Задачата е да се определят инерционните моменти  $I_u$ ,  $I_v$  и  $I_{uv}$ .



Фиг.2.9

За координатите на произволна точка в равнината са в сила следните съотношения, които могат да се проследят от фиг.2.9:

$$\begin{aligned} u &= y \cos \alpha + z \sin \alpha \\ v &= -y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.24)$$

Използвайки определението за инерционни моменти 2.8 и уравнения 2.24, за момента  $I_u$  ще получим:

$$\begin{aligned} I_u &= \int_F v^2 dF = \int_F (-y \sin \alpha + z \cos \alpha)^2 dF = \\ &= \sin^2 \alpha \int_F y^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_F yz dF + \cos^2 \alpha \int_F z^2 dF = \\ &= \dots = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (2.25)$$

Аналогично се определят и останалите два инерционни момента –  $I_v$  и  $I_{uv}$ . Окончателно за инерционните моменти в завъртяната координатна система получаваме:

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \\ I_v &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha \\ I_{uv} &= \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (2.26)$$

От последното уравнение на 2.26 лесно определяме кога центробежният момент ще стане равен на нула. За целта трябва да решим уравнението:

$$I_{uv} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha = 0$$

откъдето получаваме:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (2.27)$$

От тук определяме ъгъла, на който ще бъде завъртяна едната главна ос спрямо ос  $Y$ :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( - \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \right) \quad (2.28)$$

Тъй като двете главни оси са взаимно перпендикулярни, то завъртването на втората ос спрямо ос  $Y$  ще бъде:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \pi / 2 \quad (2.29)$$

От условието 2.9 следва, че щом сумата от двата инерционни момента е постоянна, ще има такъв ъгъл  $\alpha$  при който единият инерционен момент е максимален, а другият е минимален. За да намерим максимум (минимум) на момента  $I_u$  спрямо ъгъла  $\alpha$ , следва да решим алгебричното уравнение:

$$\frac{\partial I_u}{\partial \alpha} = 0 \quad (2.30)$$

От 2.26 получаваме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_u}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \right) = \\ &= -2 \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha - 2I_{yz} \cos 2\alpha = 0 \end{aligned}$$

откъдето следва:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (2.31)$$

Оказва се, че инерционният момент  $I_u$  получава екстремум при същият ъгъл, при който центробежният момент се анулира – виж формула 2.27. От тук следва заключението, че **спрямо главните оси на инерция**



**осовите инерционни моменти притежават екстремни стойности – единият от тях е най-голям, а другият – най-малък** от всички възможни стойности, които могат да получат при завъртване на координатната система  $UV$  спрямо  $YZ$ .

Главните оси на инерция бележим с  $1$  и  $2$  или  $max$ ,  $min$ , а моментите спрямо тях – с  $I_1$  и  $I_2$  или с  $I_{max}$  и  $I_{min}$ .

За да определим самите стойности на главните инерционни моменти  $I_{max}$  и  $I_{min}$  следва така определения ъгъл 2.27, при който те придобиват тези стойности, да се замести в първите две уравнения на 2.26. След определена преработка получаваме:

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad (2.32)$$

От 2.32 лесно се вижда, че:

$$I_{\max} + I_{\min} = I_y + I_z = I_0 \quad (2.33)$$

което следваше да се очаква. Връзката между инерционните 2.33 е причината, поради което от петте инерционни момента в таблиците за стандартни профили се дават само три от тях – обикновено  $I_y$ ,  $I_z$  и  $I_{min}$ .

След определянето на главните инерционни моменти положението на главните оси на инерция се получава по – лесно и точно от изразите 2.34. Причината е, че формула 2.28 понякога може да даде положението на втората главна ос.

$$\alpha_1 = \arctg\left(\frac{I_y - I_1}{I_{yz}}\right) \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2} \quad (2.34)$$

В някои случаи се налага да се реши обратната задача – ако са дадени положението на главните централни оси  $max$ ,  $min$  на инерция и главните инерционни моменти  $I_{max}$ ,  $I_{min}$ , да се определят инерционните моменти спрямо нова координатна система  $UV$ , завъртяна спрямо главната на ъгъл  $\alpha$  ( в посока, обратна на движението на часовата стрелка). Тази задача по нищо не се различава от вече разгледаната, затова ще използваме формули 2.26, като вземем предвид, че спрямо главните оси центробежният момент е нула. Така получаваме:

$$I_u = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2} + \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \cos 2\alpha$$

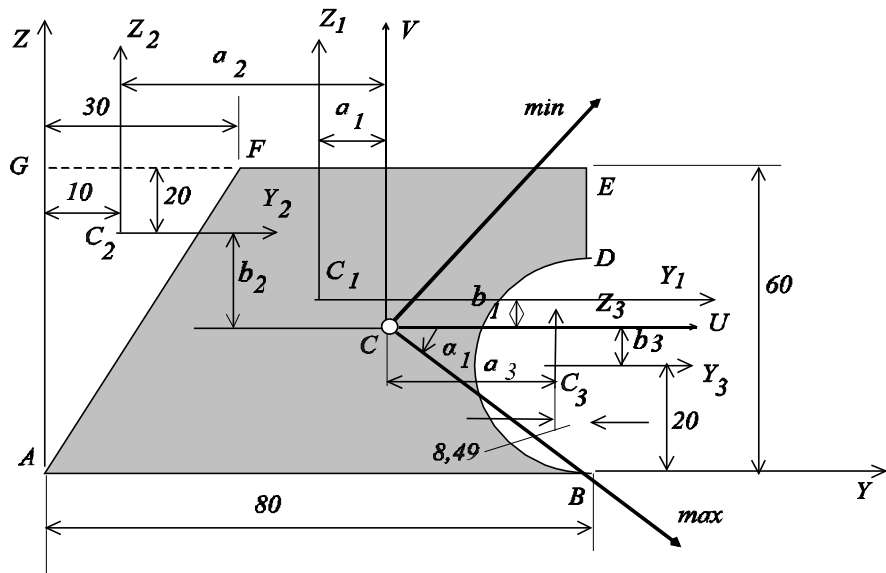
$$I_v = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2} - \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \cos 2\alpha$$

$$I_{uv} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \sin 2\alpha$$
(2.35)

От тези изрази при решаването на задачи се ползува особено често последната формула, при приложението на която трябва да се внимава за правилното определяне знака на ъгъла  $\alpha$ .

**Пример 2.1. Геометрични характеристики на сложна фигура**

Да се определят положението на главните централни оси на инерция и значенията на главните инерционни моменти за профила, показан на фиг.2.10.



**Фиг.2.10**

*А) Определяне положението на центъра на тежестта.*

Фигурата може да се разгледа като от правоъгълника ABEG се изважда триъгълника AFG и полукръга CDB. Центровете на тежест  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  на тези прости фигури са показани на фиг.2.10, определени съгласно изведените по-горе изрази.

Площите на отделните фигури са:

$$F_1 = 80.60 = 4800 \text{ mm}^2 \quad F_2 = 60.30/2 = 900 \text{ mm}^2$$

$$F_3 = \pi \cdot 20.20/2 = 628,3 \text{ mm}^2$$

Общата площ на фигурата ще бъде:

$$F = F_1 - F_2 - F_3 = 4800 - 900 - 628,3 = 3271,7 \text{ mm}^2$$

Приемаме отправна координатна система  $YZ$ , както е показано на фиг.2.10. Определяме статичните моменти  $S_y$  и  $S_z$  за всяка от фигурите:

$$S_{y,1} = F_1 \cdot 30 = 4800 \cdot 30 = 144000 \text{ mm}^3 \quad S_{z,1} = F_1 \cdot 40 = 192000 \text{ mm}^3$$

$$S_{y,2} = F_2 \cdot 2.60/3 = 900 \cdot 40 = 36000 \text{ mm}^3 \quad S_{z,2} = F_2 \cdot 30/3 = 900 \cdot 10 = 9000 \text{ mm}^3$$

$$S_{y,3} = F_3 \cdot 20 = 628,3 \cdot 20 = 12566 \text{ mm}^3 \quad S_{z,3} = F_3 \cdot (80 - 8,49) = 44929,7 \text{ mm}^3$$

Като използваме формули 2.7, определяме координатите на центъра на тежестта на съставната фигура:

$$Y_c = \frac{S_{z,1} - S_{z,2} - S_{z,3}}{F} = \frac{192000 - 9000 - 44929,7}{3271,7} = 42,2 \text{ mm}$$

$$Z_c = \frac{S_{y,1} - S_{y,2} - S_{y,3}}{F} = \frac{144000 - 36000 - 12566}{3271,7} = 29,17 \text{ mm}$$

*Б) Определяне на инерционните моменти спрямо централната координатна система  $UV$ .*

Приемаме координатна система  $UV$  с начало центъра на тежестта на съставната фигура и успоредна на всяка една от координатните системи  $Y_iZ_i$  ( $i=1,2,3$ ) на отделните фигури. За определяне на инерционните моменти на всяка от фигурите спрямо  $UV$  в случая имаме право да използваме теоремите на Щайнер – формули 2.12. Преди това следва да определим инерционните моменти на отделните фигури спрямо собствените им централни координатни системи

За правоъгълника АВЕГ имаме:

$$I_{y1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{80.60^3}{12} = 1,44 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_{z1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{60.80^3}{12} = 2,56 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y1z1} = 0$$

За правоъгълния триъгълник АFG :

$$I_{y2} = \frac{bh^3}{36} = \frac{30.60^3}{36} = 0,18 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{z2} = \frac{hb^3}{36} = \frac{60 \cdot 30^3}{36} = 0,045 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y2z2} = \frac{b^2 h^2}{72} = \frac{30^2 \cdot 60^2}{72} = 0,045 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

За полукръга CDB :

$$I_{y3} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi 20^4}{8} = 0,0628 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{z3} = 0,1098r^4 = 0,1098 \cdot 20^4 = 0,01757 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_{y3z3} = 0$$

Теоремата на Щайнер 2.12 изисква определяне и на разстоянията между централната координатна система  $UV$  и отделните координатни системи на съставните фигури. Тези разстояния са както следва – виж фиг. 2.10:

$$a_1 = -(42,2 - 40) = -2,2 \text{ mm} \quad b_1 = 30 - 29,17 = 0,83 \text{ mm}$$

$$a_2 = -(42,2 - 10) = -32,2 \text{ mm} \quad b_2 = 40 - 29,17 = 10,83 \text{ mm}$$

$$a_3 = 80 - 0,424r - 42,2 = 80 - 0,424 \cdot 20 - 42,2 = 29,32$$

$$b_3 = -(29,17 - 20) = -9,17 \text{ mm}$$

Обърнете внимание, че някои от разстоянията са с отрицателен знак !

Съгласно 2.12 за цялата фигура ще получим:

$$\begin{aligned} I_u &= I_{y1} + b_1^2 F_1 - (I_{y2} + b_2^2 F_2) - (I_{y3} + b_3^2 F_3) = \\ &= 1,44 \cdot 10^6 + 0,83^2 \cdot 4800 - (0,18 \cdot 10^6 + 10,83^2 \cdot 900) - \\ &- (0,0628 \cdot 10^6 + 9,17^2 \cdot 628,3) = 1,042 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_v &= I_{z1} + a_1^2 F_1 - (I_{z2} + a_2^2 F_2) - (I_{z3} + a_3^2 F_3) = \\ &= 2,56 \cdot 10^6 + 2,2^2 \cdot 4800 - (0,045 \cdot 10^6 + 32,2^2 \cdot 900) - \\ &- (0,01757 \cdot 10^6 + 29,32^2 \cdot 628,3) = 1,047 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{uv} &= I_{y1z1} + a_1 b_1 F_1 - (I_{y2z2} + a_2 b_2 F_2) - (I_{y3z3} + a_3 b_3 F_3) = \\ &= 0 - 2,2 \cdot 0,83 \cdot 4800 - (0,045 \cdot 10^6 - 32,2 \cdot 10,83 \cdot 900) - \\ &- (0 - 29,32 \cdot 9,17 \cdot 628,3) = 0,428 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

В) Определяне на положението на главните оси и значенията на главните инерционни моменти

Тук остава да се приложат формули 2.23 и 2.25.

$$I_{\max/\min} = \frac{I_u + I_v}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_u - I_v}{2}\right)^2 + I_{uv}^2} =$$

$$= \left( \frac{1,042 + 1,047}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1,042 - 1,047}{2}\right)^2 + 0,428^2} \right) \cdot 10^6$$

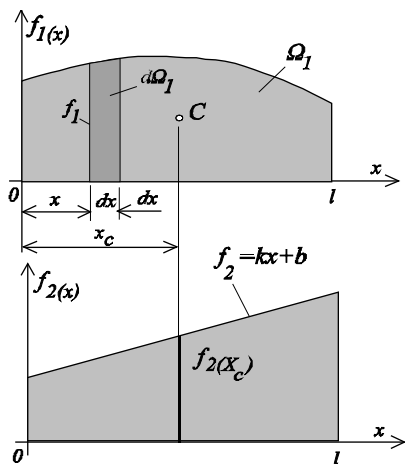
След изчисление получаваме:

$$I_{\max} = 1,474 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_{\min} = 0,616 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\alpha_{\max} = \arctg\left(\frac{I_u - I_{\max}}{I_{uv}}\right) = \arctg\left(\frac{1,042 - 1,474}{0,428}\right) = -45,2^\circ$$

Това не твърде сложно сечение показва, че при решаването на задачата за геометричните характеристики се изисква много голямо внимание. Лесно могат да се допуснат грешки, които изкривяват крайните резултати. Това последствие води до следващи грешки. Ето защо задачата за геометричните характеристики е полезно да бъде решавана числено. Същата задача е решена числено в гл. 18 с помощта на пакета СДАН.

#### 2.4. Геометрично решаване на определени интеграли. Правило на Верещагин.



Фиг.2.11

В Съпротивление на материалите се налага твърде често да се решават определени интеграли от произведение от две функции на една променлива от вида:

$$I = \int_0^l f_1(x) f_2(x) dx \quad (2.36)$$

при което за функциите  $f_1$  и  $f_2$  са известни графиките (диаграмите) на интервала  $0-l$  – фиг. 2.11. Ако едната от функциите е произволна (например  $f_1$ ), а втората - линейна ( $f_2$ ), тогава решението на интеграла може да се извърши по следната формула:

$$I = \Omega_1 f_2(X_c) \quad (2.37)$$

където  $\Omega_1$  – площ на нелинейната диаграма,  $f_2(X_c)$  – значение на линейната диаграма, изчислена “под” центъра на тежестта на нелинейната диаграма. Ако двете функции са линейни, очевидно няма значение чия площ ще вземем.

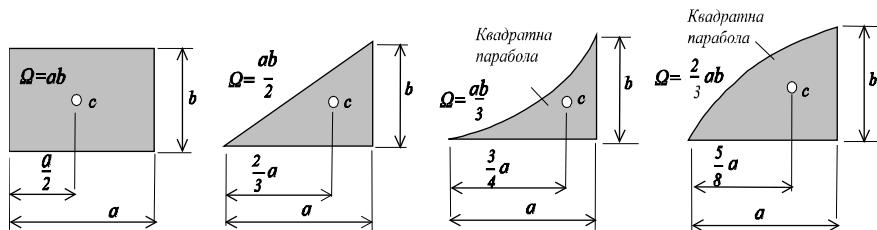
Формула 2.37 е известна като **правило на Верещагин**, предложено от него през 1925 г.

Доказателството на тази формула е следното:

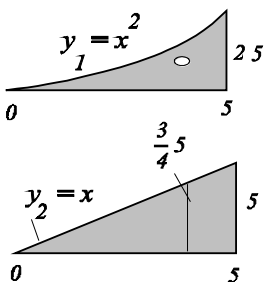
$$\begin{aligned} I &= \int_0^l f_1(x) f_2(x) dx = \int_0^l f_1(x) (kx + b) dx = k \int_0^l f_1(x) x dx + b \int_0^l f_1(x) dx = \\ &= k \int_0^l x d\Omega_1 + b \Omega_1 = k S_1 + b \Omega_1 = k \Omega_1 X_c + b \Omega_1 = \Omega_1 (k X_c + b) = \Omega_1 f_2(X_c) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Тук  $S_1$  е статичният момент на първата фигура спрямо ординатната ос.

Така решаването на интеграли от вида 2.36 (където едната функция е линейна), се свежда основно до определяне площ на фигура и нейния център на тежест. Във връзка с това е полезно да се знаят площите и центровете на тежести на следните елементарни фигури:



Фиг.2.12



Ще разгледаме елементарен пример.

Аналитично решение:

$$I = \int_0^5 x^2 x dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^5 = \frac{625}{4}$$

Геометрично решение: Ако начертаем диаграмата на функцията  $x^2$  (нелинейната) и на функцията  $-x$  (линейната), те ще имат показаните

диаграми. Площта на нелинейната диаграма е  $5.25/3$ , а ординатата на линейната диаграма под центъра на тежестта на нелинейната е  $3.5/4$ . Произведението от тези числа е  $625/4$ , т.е, получаваме същият резултат.

На пръв поглед геометричното решение е по-сложно. Но ако разполагаме само с диаграмите, този начин на интегриране е много по-бърз.

Ако функциите (диаграмите) са по-сложни, винаги можем да ги разложим на по-прости и да извършим умножението с по-простите диаграми, т.е.:

$$\text{ако } f_1 = A + B, \quad f_2 = C + D, \quad \text{то } f_1 f_2 = AC + BC + AD + BD \quad (2.39)$$

където  $A, B, C, D$  – диаграми, на които се разлагат по-сложните диаграми  $f_1$  и  $f_2$ .

Съществуват таблици за преумножаване на различни видове диаграми, разработени на основание на това правило - [8], [9], [12].

## 2.5. Секторни характеристики на тънкостенни профили

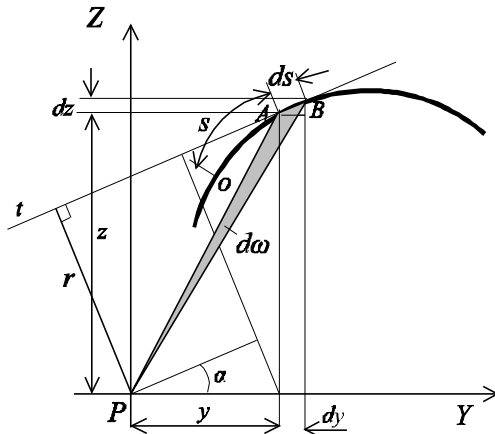
Тънкостенни профили са тези, за които дебелината на стената е поне 10 пъти по-малка от разгънатата дължина на сечението. Такива са стандартните профили 5-9 от фиг.4.1. При изчисление на пръти, съставени от такива (или подобни) профили, освен геометричните характеристики, които разгледахме по-горе (център на тежест, площ, статични и инерционни моменти), са необходими още ред други характеристики, зависещи само от формата на сечението на профила, като секторна площ, секторни линейни моменти, секторен инерционен момент, център на усукване (огъване) и др., които ще разгледаме по-долу.

### А) Секторна площ

Нека имаме някакъв тънкостенен профил с произволно очертание. Ще вземем произволна точка от равнината на профила –  $P$ , която ще наречем **полюс** и произволна точка от профила –  $O$ , която ще наречем **начало на отчитане** – фиг.2.13. Приемаме координатна система  $YZ$  с начало, поместено в полюса. По определение **секторната площ** се дава с интеграла:

$$\omega = \int_0^s r ds \quad [m^2] \quad (2.40)$$

където  $ds$  – елементарна дъга, взета по средния контур на профила на разстояние  $S$  от началото на отчитане,  $r$  – разстояние от полюса до тангентата, прекарана към средния контур на профила в точката с координата  $S$ .



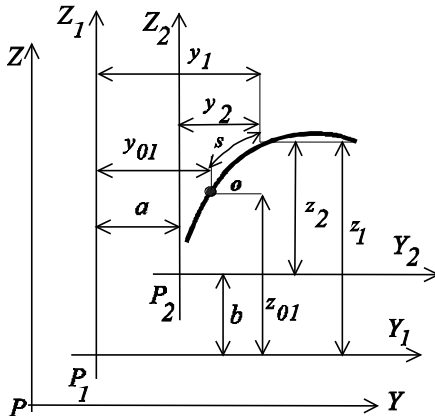
Фиг.2.13

счита за положителна.

От фиг.2.13 се виждат следните съотношения:

$$r = z \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dz}{ds}$$

Тези изрази, заместени в 2.40, дават втори начин за изчисление на секторната площ:



Фиг.2.14

начало - полюса  $P_2$ , успоредни на осите  $Y_1Z_1$ . Връзката между координатите в двете системи се дават с изразите:

От фиг.2.13 се вижда, че елементарната секторна площ  $d\omega = r ds$  представлява **удвоеното лице** на застрихования триъгълник  $PAB$ . Следователно геометричният смисъл на секторната площ на разстояние  $s$  от началото на отчитане (формула 2.40), представлява удвоената площ, която радиус вектора  $PA$  “измита” при движението си по средния контур на профила от т.О до т.А. При въртене на радиус вектора по часовата стрелка, секторната площ се

$$\omega = \int_0^s z dy - y dz \quad (2.41)$$

### Б) Изменение на секторната площ при промяна на полюса.

Нека да сме изчислили секторната площ за полюс  $P_1$ . Търсим секторната площ за полюс  $P_2$ , който се намира на разстояние  $a$  и  $b$  от координатните оси  $Y_1Z_1$  с начало - полюса  $P_1$  – фиг.2.14.

Прекарваме осите  $Y_2Z_2$  с



$$y_2 = y_1 - a \rightarrow dy_2 = dy_1$$

$$z_2 = z_1 - b \rightarrow dz_2 = dz_1$$

На основание на 2.41, за секторната площ в новата координатна система имаме:

$$\omega_2 = \int_0^s z_2 dy_2 - y_2 dz_2 = \int_0^s (z_1 - b) dy_1 - (y_1 - a) dz_1 =$$

$$= \int_0^s z_1 dy_1 - y_1 dz_1 - b \int_0^s dy_1 + a \int_0^s dz_1 = \omega_1 + a(z_1 - z_{01}) - b(y_1 - y_{01})$$

Секторната площ  $\omega_2$  няма да се промени, ако в горната формула координатите  $Y_1$  и  $Z_1$  заместим с  $Y$  и  $Z$ , които са оси на една произволно взета координатна система с оси, успоредни на първите две системи и с начало – произволен полюс  $P$ . Или:

$$\omega_2 = \omega_1 + a(z - z_0) - b(y - y_0) \quad (2.42)$$

Полученият израз дава връзката между секторните площи при промяна на полюса. Той показва, че при смяна на полюса, секторната площ се променя с линейни функции на координатите  $y$  и  $z$ . При смяна на началото на отчитане (т.О), секторната площ се променя с една константа.

### **В) Секторни характеристики**

Дефинират се следните четири секторни характеристики:

$$S_\omega = \int_F \omega dF \quad [m^4]$$

$$S_{\omega_y} = \int_F \omega y dF \quad [m^5]$$

$$S_{\omega_z} = \int_F \omega z dF \quad [m^5]$$

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF \quad [m^6] \quad (2.43)$$

Тук  $S_\omega$  се нарича **секторен статичен момент**,  $S_{\omega_y}$  и  $S_{\omega_z}$  – **секторни линейни моменти** (или **секторни центробежни моменти**), а  $J_\omega$  – **секторен инерционен момент**. Последният е винаги положителен, докато останалите могат да бъдат положителни, отрицателни или нула.

Ако дебелината на тънкостенния профил е постоянна, тогава изразите 2.43 добиват вида:

$$S_{\omega} = \delta \int_F \omega ds, \quad S_{\omega y} = \delta \int_F \omega y ds, \quad S_{\omega z} = \delta \int_F \omega z ds, \quad J_{\omega} = \delta \int_F \omega^2 ds \quad (2.44)$$

Както видяхме, секторната площ, която участва в тези изрази, зависи от приетите полюс и начало на отчитане. Интерес обаче представляват само секторни характеристики при точно определен полюс и начало, което ще видим по-долу.

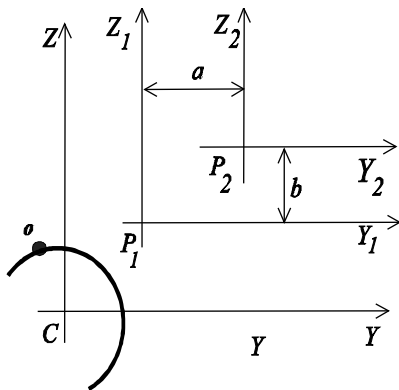
### Г) Център на огъване (усукване)

При тънкостенните профили освен център на тежестта, съществува втора характерна точка, лежаща в напречното сечение на пръта, която се нарича **център на огъване** или **център на усукване** (понякога центърът на огъване съвпада с център на тежестта). Физическият смисъл на тази точка ще разгледаме в гл.6 и гл.7. По-нататък ще използваме само понятието “център на огъване”.

Центърът на огъване е точка, за която, ако бъде избрана за полюс, секторните линейни моменти се анулират, т.е.:

$$S_{\omega y} = \int_F \omega y dF = 0, \quad S_{\omega z} = \int_F \omega z dF = 0 \quad (2.45)$$

От това свойство се определя и положението на центъра на огъване. Ще получим изразите за координатите на центъра на огъване на произволен тънкостенен профил.



Фиг.2.15

За целта определяме секторната площ за координатна система YZ, имаща начало центъра на тежестта на профила (т.С), с произволен полюс  $P_1$  и с произволно начало на отчитане – фиг.2.15. Нека т. $P_2$  да бъде центъра на огъване, отстояща на разстояние  $a$  и  $b$  от т. $P_1$ . Тогава за секторните площи, изчислени за двата полюса, ще е в сила връзката 2.42. Но за втория полюс, ако той е център на огъване, ще се изпълняват условията 2.45, т.е:

$$\int_F \omega_2 y dF = \int_F (\omega_1 + a(z - z_0) - b(y - y_0)) y dF = 0$$

$$\int_F \omega_2 z dF = \int_F (\omega_1 + a(z - z_0) - b(y - y_0)) z dF = 0$$
(2.46)

Ако развием първото уравнение, получаваме:

$$\int_F \omega_1 y dF + a \int_F z y dF - a z_0 \int_F y dF - b \int_F y^2 dF + b y_0 \int_F y dF = 0$$

Като вземем предвид, че осите  $YZ$  са централни, получаваме:

$$S_{\omega_1 y} + a J_{yz} - b J_z = 0$$
(2.47)

Аналогично, развивайки второто уравнение на 2.46, получаваме:

$$S_{\omega_1 z} + a J_y - b J_{yz} = 0$$
(2.48)

От последните две уравнения получаваме координатите  $a$  и  $b$ , които определят положението на центъра на огъване спрямо полюса  $P_1$ :

$$a = \frac{-S_{\omega_1 z} J_z + S_{\omega_1 y} J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2}, \quad b = \frac{S_{\omega_1 y} J_y - S_{\omega_1 z} J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2}$$
(2.49)

Така намерените координати не зависят от приетото начало на отчитане. Изрази 2.49 са използвани като отправни за числено определяне на центъра на огъване в разработения софтуер – пакета СДАН (гл. 18).

Ако осите  $YZ$  са главни, тогава формули 2.49 се опростяват (но не и изчисленията, ако профилът е несиметричен):

$$a = \frac{-S_{\omega_1 z}}{J_y}, \quad b = \frac{S_{\omega_1 y}}{J_z}$$
(2.50)

#### Д) Главна секторна площ

Ако се построи секторна площ с полюс центъра на огъване и такова начало, че секторният статичен момент  $S_{\omega}$  се анулира, тогава секторната площ се нарича **главна секторна площ**. Съответният инерционен момент  $J_{\omega}$ , изчислен за тази секторна площ, се нарича **главен секторен инерционен момент**, който е необходим за изчисленията на тънкостенни профили.

Как да се разбере кое начало на отчитане да се вземе, че  $S_{\omega}$  да се анулира? Понякога това е очевидно, но в общия случай се постъпва така: Определя се секторната площ с полюс центъра на огъване и произволно

начало на отчитане  $\omega_0$ . Главната секторна площ се различава от така построената с една константа:  $\omega = \omega_0 + C$  (видяхме, че при промяна на началото на отчитане секторната площ се променя с константа). За главната секторна площ е изпълнено условието:

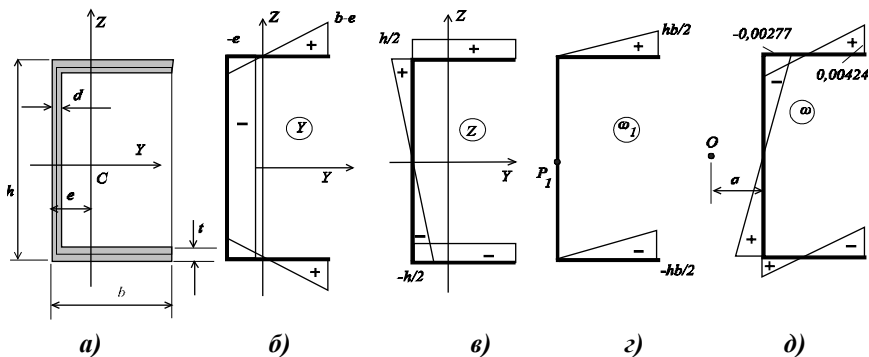
$$S_{\omega} = \int_F \omega dF = \int_F (\omega_0 + C) dF = \int_F \omega_0 dF + CF = 0 \rightarrow C = -\frac{\int_F \omega_0 dF}{F} \quad (2.51)$$

Така намерената константа прибавяме към предварително определената секторна площ  $\omega_0$ .

### Е) Пример 2.2. Секторни характеристики на тънкостенен профил.

Да се определят центъра на огъване и главната секторна площ за стандартен П-образен профил N20 (по БДС 6176-75) със следните размери:  $h=0,2 \text{ m}$ ,  $b=0,076 \text{ m}$ ,  $d=0,0052 \text{ m}$ ,  $t=0,009 \text{ m}$ -фиг.2.16-а. За профила още имаме:  $J_y=1530 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ ,  $J_z=134 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ ,  $F=23,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $e=0,023 \text{ m}$ .

Тъй като главните оси на инерция са дадени, за определяне на центъра на огъване ще използваме формули 2.50. За да намерим секторните линейни моменти, стоящи в числителите, най-напред определяме диаграмите  $Y$  и  $Z$  (координатите на контура) на профила, показани на фиг.2.16-б и 2.16-в



Фиг.2.16

При определяне на всички диаграми работим със средния контур на профила (показан с пунктир), за който височината и широчината на профила се редуцират съответно до  $h \rightarrow h-t = 0,191 \text{ m}$ ,  $b \rightarrow b-d/2 = 0,0734 \text{ m}$ . За определяне на секторната площ  $\omega_1$  - фиг.2.16-г, избираме такъв полюс, че секторната диаграма да се получи по-проста и симетрична – средата на стеблото на профила. Интегралите могат да се решат геометрично чрез правилото на Верещагин. Тъй като диаграма  $Y$  е симетрична, а диаграма  $\omega_1$  е антисиметрична, то резултатът от тяхното преумножение ще е нула,

следователно  $S_{\omega y} = 0$  и отместването  $b$  на центъра на огъване (по ос  $Z$ ) спрямо полюса  $P_1$ , определено съгласно 2.50, ще бъде нула. Остава да решим интеграла за определянето на  $S_{\omega z}$ . Преумножаваме само участъка на горния пояс и резултатът умножаваме по две (на долния пояс резултатът ще е същият):

$$S_{\omega z} = \int_F \omega_1 z dF = 2t \int_0^b \omega_1 z ds = 2t \frac{1}{2} b \frac{hb}{2} \frac{h}{2} = \frac{b^2 h^2 t}{4} =$$

$$= \frac{0,0734^2 0,191^2 0,009}{4} = 4,42 \cdot 10^{-7} m^5$$

По формула 2.50 определяме отместването на центъра на огъване по ос  $Y$  от полюса  $P_1$ :

$$a = - \frac{S_{\omega z}}{J_y} = \frac{4,42 \cdot 10^{-7}}{1530 \cdot 10^{-8}} = -0,029 m$$

Знакът (-) показва, че отместването е против ос  $Y$ .

С така намерения център на огъване  $O$ , който приемаме за полюс и начало на отчитане – средата на стеблото, определяме диаграмата на главната секторна площ – фиг.2.16-д. Поради антисиметрията нейната сумарна площ ще бъде нула, с което е удовлетворено условието  $S_{\omega} = 0$ .

За да определим главния секторен инерционен момент, следва да решим последния от интегралите 2.44, където като подинтегрална функция трябва да вземем главната секторна площ. Този интеграл също може да се реши по правилото на Верещагин. Поради симетрията на диаграмите  $\omega$  и  $z$  преумножаваме само едната им половина и резултатът удвояваме. За стеблото получаваме:

$$2d \left( \frac{1}{2} \frac{h}{2} 0,00277 \frac{2}{3} 0,00277 \right) = 0,0052 \cdot 0,191 \cdot 0,00277^2 / 3 = 25,4 \cdot 10^{-10} m^6$$

За поясите, като използваме таблиците [8] за преумножаване на диаграми по метода на Верещагин, получаваме:

$$2t \frac{(h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2)}{3} b =$$

$$= 2 \cdot 0,009 \frac{0,00277^2 - 0,00277 \cdot 0,00424 + 0,00424^2}{3} 0,0734 = 61,24 E - 10 m^6$$

Окончателно получаваме  $J_{\omega} = (25,4 + 61,24) \cdot 10^{-10} = 86,64 \cdot 10^{-10} m^6$ .

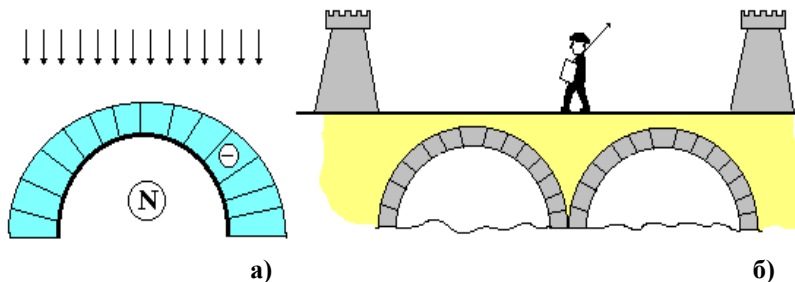
В някои специализирани справочници за тънкостенни профили този момент се дава заедно с другите геометрични характеристики. Численото решение на тази задача е приведено в гл. 18. Значителен брой примери са разгледани в [24].

## Гл. 3. ЦЕНТРИЧЕН ОПЪН-НАТИСК

### 3.1. Напрегнато състояние при опън-натиск

Центричен опън-натиск имаме, когато в напречното сечение на пръта действа единствено нормална сила. Когато  $N > 0$ , имаме **центричен опън**, а когато  $N < 0$  – **центричен натиск**.

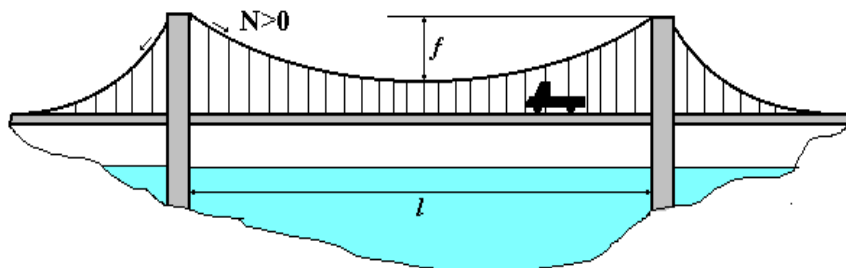
В античността, когато основен строителен материал е бил камъка, единствено възможно е било строителство на съоръжения, изпитващи основно натиск – арки, сводове, куполи, пирамиди и др. На фиг.3.1-а е показано разпределението на нормалната сила в арка под действието на собственото и тегло и вертикален разпределен товар. Вижда се, че по цялото протежение арката изпитва само натиск (Огъващият момент е незначителен). Майсторството на строителите, освен в архитектурните решения, се е състояло и във финото припасване на големи каменни блокове, оформящи арките и сводовете и в осигуряване на неподвижността на опорите, което се е постигало чрез струпване на значителни тежести в тези места, архитектурно оформени като кули, бойници и др. - фиг.3.1-б.



**Фиг.3.1. Конструкция, работеща основно на натиск**

В наше време най-големите съоръжения отново са базирани върху този вид съпротива – но този път върху центричния опън. Достатъчно е да споменем за въжения мост в Кобе - Япония с дължина между опорите ( $l$ ) близо 2 км (фиг.3.2). През последното столетие успоредно с широкото навлизане на стоманата като строителен материал, бяха построени метални конструкции със впечатляващи размери, като мачти за радиоантени с височина до 1000 м. Архитектурата на такова съоръжение представлява пространствена ферма, укрепена с обтяжки. Както знаем, фермата е конструкция, отделните елементи на която изпитват само опън или натиск.

Защо конструкциите, базирани върху опън и натиск са така ефективни, ще видим по-долу.



**Фиг.3.2. Конструкция, работеща основно на опън**

**А) Напрежения в напречното сечение**

Ако разгледаме прът с праволинейна ос и с постоянно напречно сечение, подложен на центричен опън, за сеченията, достатъчно далече от местата на прилагане на силите е валидна хипотезата за равнинните сечения, т.е. всяко напречно сечение на пръта преди и след натоварването остава равнинно – фиг.3.3. Следователно всички влакна, успоредни на оста на пръта, изпитват едно и също удължение, а значи и една и съща относителна линейна деформация  $\varepsilon$ . От закона на Хук за опънатата нишка ( $\sigma = E\varepsilon$ ) следва, че напреженията по цялото напречно сечение също ще са едни и същи.



**Фиг.3.3. Центричен опън**

От интегралната връзка между нормалната сила и напреженията 1.19 следва, че щом напрежението е постоянно, тогава  $N = \sigma_x F$ , откъдето за напрежението в напречното сечение получаваме:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} \tag{3.1}$$

Тази формула остава в сила и за праволинеен прът с променливо сечение.

Фактът, че напрежението при опън-натиск е постоянно по цялото напречно сечение, означава, че носещите способности на материала се използват пълноценно – всяка точка от тялото изпитва максимално възможното натоварване. Това е причината, поради която конструкциите, изпитващи основно опън/натиск, са възможно най-товароемките при относително нисък разход на материал.

От 3.1 при известна сила и допустимо напрежение можем да определим необходимото сечение:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]} \quad (3.2)$$

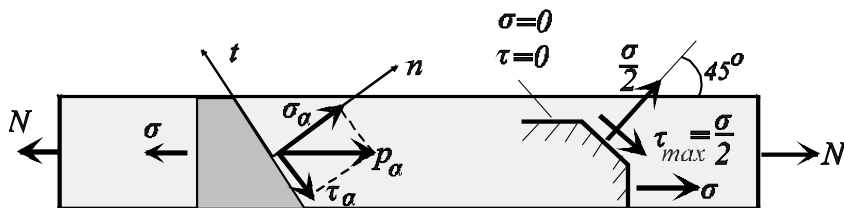
Ако формула 3.2 е точна за опън, то при натиск тя трябва да се прилага с особено внимание. При по-дългите пръти, подложени на натиск, е възможна загуба на устойчивост. Това недоглеждане на инженерите в края на 19 и началото на 20 век е струвало доста човешки жертви и материални загуби. Проблемът за устойчивостта на натиснати пръти ще бъде разгледан в гл. 11.

При известно сечение и допустимо напрежение, можем да определим допустимата сила:

$$[N] \leq F[\sigma] \quad (3.3)$$

### Б) Напрежения по наклонена площадка

Ако прекараме наклонена площадка с нормала, сключваща с ос  $X$  ъгъл  $\alpha$ , върху нея в общия случай ще действуват пълно, нормално и тангенциално напрежение – фиг.3.4.



Фиг. 3.4. Напрежения по наклонена площадка

От условието за равновесие на потъмнения елемент, можем да запишем:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad p_\alpha F_\alpha - \sigma_x F = 0 \quad \rightarrow \quad p_\alpha = \sigma_x \frac{F}{F_\alpha} = \sigma_x \cos \alpha$$

Нормалното и тангенциалното напрежения ще бъдат:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= p_\alpha \cos \alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha \\ \tau_\alpha &= -p_\alpha \sin \alpha = -\sigma_x \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$



Тук знака (-) на тангенциалното напрежение произтича от факта, че е насочено против локалната координатна ос  $t$ , която образува с нормалата дясно ориентирана координатна система. Или:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_{\alpha} &= -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha\end{aligned}\quad (3.4)$$

Замествайки различни стойности на ъгъла  $\alpha$ , получаваме:

1.  $\alpha = 0 \rightarrow \sigma_{\alpha} = \sigma, \tau_{\alpha} = 0$ .
2.  $\alpha = \pm 45^{\circ} \rightarrow \sigma_{\alpha} = \sigma/2, \tau_{\alpha} = \pm\sigma/2 = \tau_{\max}$ .
3.  $\alpha = 90^{\circ} \rightarrow \sigma_{\alpha} = 0, \tau_{\alpha} = 0$ .

От тук могат да се направят следните изводи: Максималното тангенциално напрежение при центричен опън/натиск възниква по площадки, наклонени под ъгъл  $\pm 45$  градуса спрямо оста на пръта; По площадки, успоредни на оста на пръта ( $\alpha = 90^{\circ}$ ), напрежения липсват, т.е. прътът може да се разгледа като отделни нишки, работещи съвместно, без да е необходимо те да бъдат по някакъв начин слепени една към друга. (Защо тогава в повдигателните съоръжения не се използват плътни пръти, а въжета, които са съставени от отделни нишки?)

Фактът, че по площадки, наклонени под ъгъл 45 градуса, възникват максимални тангенциални напрежения, обяснява защо материали, които се съпротивляват слабо на срязване, при натоварване на опън/натиск се разрушават по тази равнина – фиг. 3.16.

От второто уравнение на 3.4 следва още:

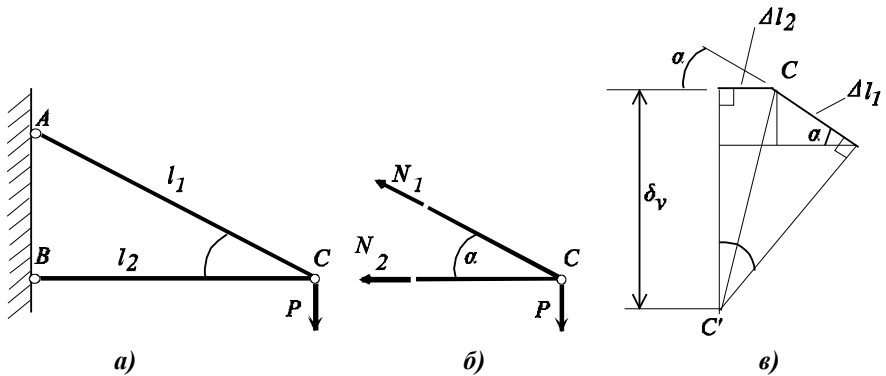
$$\tau\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\tau \sin(2\alpha + \pi) = \tau \sin 2\alpha = -\tau_{\alpha}\quad (3.5)$$

т.е., тангенциалните напрежения по две взаимно перпендикулярни площадки са равни по големина. Ако се вземе предвид знака, ще получим, че те са или насочени към общия ръб на площадката, или “бягат” от общия ръб. Този факт, както ще видим в гл.4, е общ за всяко напрегнато състояние и изразява т.н. **Закон за взаимност на тангенциалните напрежения.**

### ***В) Примери***

#### ***Пример 3.1. Оразмеряване на стенен кран***

Да се определят сеченията на прътите на стенен кран, изобразен на фиг.3.5. Обтегачът е изпълнен от стомана с допустимото напрежение на опън  $[\sigma]_{on} = 160 \text{ MPa}$ , а гредата – от дърво с допустимо напрежение на натиск  $[\sigma]_n = 5 \text{ MPa}$ . Дадено:  $P = 50 \text{ kN}$ ,  $\alpha = 30^{\circ}$ .



Фиг.3.5. Стенен кран

От равновесието на възела определяме (фиг.3.5-б):

$$\begin{aligned} \sum Z = 0 & \quad N_1 \sin \alpha - P = 0 \\ \sum X = 0 & \quad N_1 \cos \alpha + N_2 = 0 \end{aligned}$$

От тук определяме:

$$N_1 = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{50}{0,5} = 100 \text{ kN} \quad N_2 = - \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} = - \frac{50}{0,577} = - 86,6 \text{ kN}$$

Минималните сеченията на прътите ще бъдат:

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{100 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \quad F_2 \geq \frac{|N_2|}{[\sigma]} = \frac{86,6 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6} = 173,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

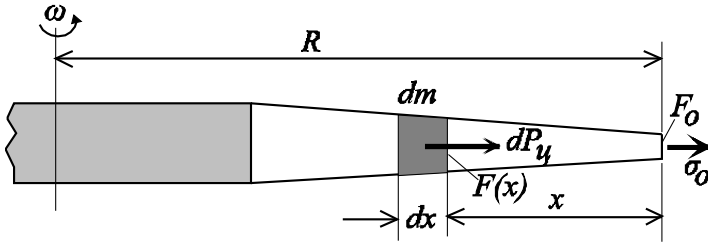
Обтегачът може да се изпълни с кръгло сечение с диаметър 3 cm, а гредата – квадрат със страна 14 cm. За гредата обаче е необходима допълнителна проверка на устойчивост !

### Пример 3.2. Напрежения в турбинна лопатка

Основното натоварване на турбинните лопатки е натоварването от центробежните сили. Целесъобразно е напречното сечение на лопатката, движейки се от корена към края да изтънява.

Да се определи закона на изменение на напречното сечение на турбинна лопатка, щото напрежението по цялата и дължина да е равно на напрежението в края -  $\sigma_0$  - фиг.3.6. Това напрежение може да се избере като напрежение, предизвикано от центробежните сили, предизвикани от една малка част от края на лопатката.

Дадено:  $F_0$  - сечение на лопатката в края,  $R$  - външен радиус,  $\omega$  - ъглова скорост на въртене,  $\rho$  - плътност на материала на лопатката:



**Фиг.3.6. Напрежения в турбинна лопатка от центробежните сили**

Приемаме ос  $x$  от края на лопатката към корена. Центробежната сила на елементарна маса  $dm$  е:

$$dP_u = dm\omega^2(R-x) = Fdx\rho\omega^2(R-x)$$

Нормалната сила и напрежението на разстояние  $x$  ще бъдат:

$$N = \sigma_0 F_0 + \int_0^x dP_u = \sigma_0 F_0 + \int_0^x F\rho\omega^2(R-x)dx$$

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{\sigma_0 F_0 + \int_0^x F\rho\omega^2(R-x)dx}{F} = \sigma_0 = const$$

Или:

$$\sigma_0 F_0 + \int_0^x F\rho\omega^2(R-x)dx = F\sigma_0$$

След диференциране на двете страни, получаваме:

$$F\rho\omega^2(R-x)dx = \sigma_0 dF$$

$$\frac{dF}{F} = \frac{\rho\omega^2(R-x)}{\sigma_0}$$

След интегриране, получаваме:

$$\ln F - \ln C = \frac{\rho\omega^2}{\sigma_0} \left( Rx - \frac{x^2}{2} \right)$$

Или:

$$F = C e^{\frac{\rho \omega^2}{\sigma_0} \left( R x - \frac{x^2}{2} \right)}$$

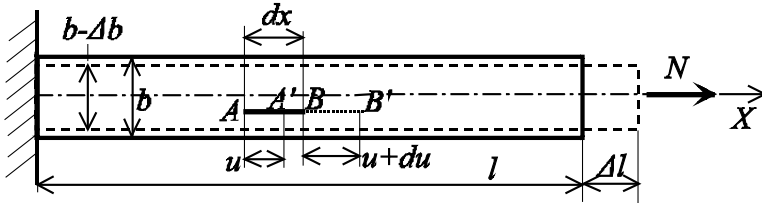
При  $x=0$  имаме  $F=F_0$ , откъдето интеграционната константа  $C=F_0$ .  
Окончателно за закона на изменение на напречното сечение получаваме:

$$F = F_0 e^{\frac{\rho \omega^2}{\sigma_0} \left( R x - \frac{x^2}{2} \right)}$$

### 3.2 Деформирано състояние при опън / натиск

#### А) Определения

Ако отхвърлим особеностите в краищата, които възникват в един центрично опънат прът с постоянно напречно сечение, деформираното му състояние ще изглежда така, както е показано на фиг.3.7 с пунктирна линия. Освен, че се удължава, в напречно направление прътът изтънява. Това е било забелязано за пръв път от **Поасон** (1781-1850), който изпитвайки стоманени пръти на опън, установил, че в напречно направление прътът се деформира около четири пъти по-малко, отколкото в надлъжно направление.



**Фиг.3.7. Деформирано състояние на центрично опънат прът**

Въвеждаме следните определения:

Изменението на дължината на пръта  $\Delta l$  наричаме **абсолютно линейно удължение**.

Изменението на напречния размер на пръта  $\Delta b$  наричаме **абсолютно напречно свиване**.

Отношението

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{3.6}$$

наричаме **относителна линейна деформация**.

Отношението

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta b}{b} \tag{3.7}$$

наричаме **напречна линейна деформация**.

Оказва се, че за всеки материал отношението между напречната и надлъжната деформация представлява някаква постоянна величина:

$$\mu = - \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} \quad (3.8)$$

Това отношение наричаме **коэффициент на Поасон**. Знакът (-) пред отношението се взема, защото  $\mu$  е положително число, а напречната и надлъжната относителни деформации имат винаги противни знаци – ако прътът се удължава, в напречно направление се свива и обратно. За различните материали това отношение е различно (виж Приложение 1), но винаги се намира в границите  $0 \div 0.5$ , което ще бъде доказано в гл.4.

### **Б) Определяне на осевото преместване и удължението**

Да разгледаме отсечката  $AB$  с дължина  $dx$  от оста на пръта – фиг. 3.7. В деформирано състояние отсечката заема положение  $A'B'$ , като т.А се е преместила по оста на пръта на разстояние  $U$ , а т.В – на разстояние  $U+dU$ . Като използваме определението за относителна линейна деформация в точка (виж формула 1.11), получаваме:

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(dx + U + dU - U) - dx}{dx} = \frac{dU}{dx} \quad (3.9)$$

Като вземем предвид, че:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EF} \quad (3.10)$$

получаваме:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{N}{EF} \quad (3.11)$$

От последното уравнение определяме осевото преместване в произволна точка от пръта:

$$U = \int \frac{N}{EF} dx + C$$

При неподвижен ляв край ще получим, че интеграционната константа  $C$  е равна на нула.

Тогава, ако  $N = const$  и  $EF = const$ , получаваме:

$$U(x) = \frac{Nx}{EF} \quad (3.12)$$

При  $x=l$  ще получим преместването на десния край на пръта, което ще е абсолютното удължение  $\Delta l$ :

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \quad (3.13)$$

Произведението  $EF$  в знаменателя се нарича **коравина на опън-натиск**. Колкото по-голямо е това число, толкова прътът е по-корав (по-недеформируем).

Величината

$$e_{oc} = \frac{l}{EF} \quad (3.14)$$

се нарича **податливост на пръта** [ $m/N$ ] на опън-натиск. Ако прътът се състои от няколко участъка, то сумарната податливост ще бъде сума от податливостите на отделните участъци.

Ако в допълнение прътът се нагрява, към удължението 3.13 следва да добавим температурното удължение както следва:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} + \alpha \Delta T \quad (3.15)$$

Тук  $\Delta T^\circ$  е температурна разлика на пръта (положителна, ако температурата се повишава). Температурната разлика се изчислява спрямо температурата на монтаж на съоръжението, в което се монтира пръта.  $\alpha$  – физична константа, зависеща от материала на пръта, която се нарича **коэффициент на линейно температурно разширение** на пръта – виж Приложение 1. За стомана  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} [deg^{-1}]$ . Температурното удължение не бива да бъде пропускано.

### ***В) Диференциално уравнение на опънатия прав прът***

Ако диференцираме 3.12 по  $x$  (при  $EF=const$ ) и използваме първата зависимост на **Журавски** 1.7, ще получим:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{-t(x)}{EF} \quad (3.16)$$

Това диференциално уравнение от втори ред представлява диференциалното уравнение на опънатия прав прът. То позволява както определянето на осовото преместване  $U$ , така и нормалната сила  $N$ . Наистина след интегриране на 3.16 получаваме:

$$U = - \iint \frac{t(x)}{EF} dx dx + C_1 x + C_2$$

$$N = EF \frac{dU}{dx} = - \int t(x) dx + EFC_1 \quad (3.17)$$

където  $C_1, C_2$  – интеграционни константи, които се определят от условията на закрепване и натоварване на пръта. За всеки участък на пръта се появяват по 2 константи, така, че общият им брой ще бъде  $2n$ , където  $n$  – общ брой на участъците.

Уравнение 3.16 и решенията 3.17 ще бъдат използвани при численото решение на задачите от центричен опън-натиск в гл.18.

### **Г) Пример 3.3. Деформация на стенен кран**

Да се определи вертикалното преместване на т.С на стенния кран от фиг.3.5.

След като сме определили нормалните сили във всеки от прътите и знаем напречните сечения, можем да намерим удълженията на прътите:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} > 0 \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} < 0$$

Тези деформации чертаем върху направлениата на прътите в т.С–фиг.3.5-в, отчитайки техния знак. За да намерим положението на т.С в деформирано състояние на крана –  $C'$ , от края на деформациите прекарваме перпендикуляри (при малки деформации те съвпадат с дъгите, описани с център – неподвижната точка на съответния прът и радиус – новата дължина на пръта). Пресечната точка на тези перпендикуляри ще бъде положението на т.С в деформирано състояние. Това графично построяване се нарича **диаграма на Вилио**. От нея лесно можем да определим пълното преместване  $CC'$ , вертикалното и хоризонталното преместване.

Аналитичното определяне на вертикалното, хоризонталното и пълното преместване се извършва чрез чисто геометрически зависимости от диаграмата на Вилио. В частност за вертикалното преместване получаваме:

$$\delta_v = \Delta l_1 \sin \alpha + \frac{\Delta l_2 + \Delta l_1 \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Тук удълженията на прътите се вземат по модул.

### **3.3. Статически неопределени системи при опън-натиск**

### А) Определения

Както показва названието, **статически неопределени системи** са системи, за които опорните реакции и вътрешните усилия не могат да бъдат определени само чрез уравненията на статиката. Такива системи могат да бъдат решени само след като се вземат предвид деформациите на конструкцията, т.е., само чрез средствата на Съпротивление на материалите.

Въвеждаме понятието **степен на статическа неопределеност**. Това е цяло положително число ( $n$ ), равно на разликата между общият брой на неизвестните ( $m$ ) и броят на уравненията на статиката ( $s$ ), които могат да се запишат за тях:

$$n = m - s \quad (3.18)$$

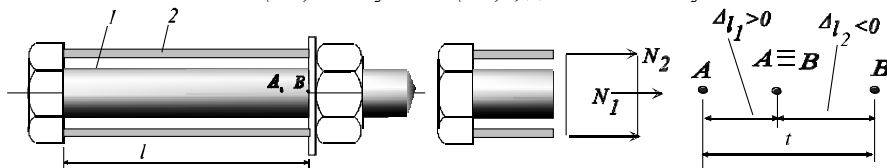
Ясно е, че за да получим пълната система от уравнения за неизвестните, към уравненията на статиката ( $s$  на брой) следва да се добавят т.н. деформационни уравнения ( $n$  на брой), които за всяка конкретна система са уникални.

Статически неопределените системи имат две съществени особености, които липсват в статически определените, а по-точно те са: 1. В статически неопределените системи при промяна на температурата възникват т.н. **температурни напрежения**. 2. В статически неопределените системи възникват т.н. **монтажни напрежения**, напрежения, които се появяват вследствие неточностите при изработката на отделните пръти. Тези две особености по-долу ще бъдат показани на конкретни примери.

### Б) Примери

#### Пример 3.4. Напрежения в болтово съединение

Болт със стъпка на резбата  $t$  мм е вкаран в цилиндрична втулка, след което гайката е затегната на един оборот – фиг.3.8. Да се определят напреженията от затягането в болта и втулката. Дадено: Коровина на опън/натиск на болта  $(EF)_1$  и втулката  $(EF)_2$ , дължина на втулката –  $l$ .



Фиг.3.8. Напрежения в болтово съединение

Ако разрежем болта и втулката, уравнението за равновесие на лявата част ще бъде:

$$N_1 + N_2 = 0$$



Тук  $N_1$  – нормална сила в болта,  $N_2$  нормална сила във втулката. Други уравнения на статиката за двете неизвестни нормални сили не могат да се запишат и следователно задачата е един път статически неопределена.

Ако разгледаме картината на деформациите на болта и втулката, можем да запишем:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = t$$

където  $t$  – стъпка на резбата.

Деформациите на болта и втулката ще бъдат:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{(EF)_1} \quad \Delta l_2 = - \frac{N_2 l}{(EF)_2}$$

Тук знакът за деформацията на втулката е отрицателен, защото сме предположили, че и двете нормални сили са опъновни, а деформацията на втулката, видно от фиг.3.8 е отрицателна. Въобще, правилата за съставяне на уравненията на статиката и деформационните уравнения са следните:

1. Нормалните сили се вземат винаги за положителни.
2. Написват се уравненията на статиката.
3. Рисува се картината на деформациите и се записват чисто геометрични съотношения (без вземане под внимание на знаците).
4. В тези геометрични съотношения деформациите се заместват със съответните изрази 3.15, като минус се взема тогава, когато деформацията на съответния прът от нарисуваната картина е отрицателна.

Така в случая получаваме следната система уравнения за неизвестните сили:

$$N_1 + N_2 = 0$$

$$\frac{N_1 l}{(EF)_1} - \frac{N_2 l}{(EF)_2} = t$$

След решението на системата, получаваме:

$$N_1 = \frac{t (EF)_1 (EF)_2}{l (EF)_1 + (EF)_2} \quad N_2 = - N_1$$

Ако  $(EF)_1 = (EF)_2 = (EF)$ , получаваме:

$$N_1 = EF \frac{t}{2l} \quad N_2 = - N_1$$

Ако единият елемент, например втулката е с много по-малка коравина от коравината на болта ( $(EF)_2 \ll (EF)_1$ ) (например болта е стоманен, а втулката - гумена), тогава слагаемото  $(EF)_2$  в знаменателя може да се пренебрегне (но не и в числителя!) и ще получим:

$$N_1 = \frac{t}{l}(EF)_2 \quad N_2 = -N_1$$

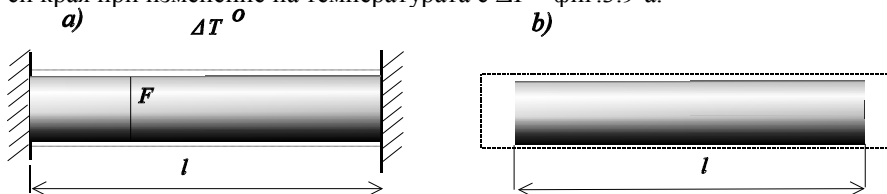
т.е. силите в двата елемента се определят главно от коравината на по-еластичната втулка.

Напряженията в болта и втулката за всеки случай ще получим, като разделим намерените сили с площта на съответното напречно сечение.

Направените изводи от решението на тази задача може да се отнесе за всяко болтово съединение.

### Пример 3.5. Температурни напряжения

Да се определят напряженията в прът, неподвижно закрепен в двата си края при изменение на температурата с  $\Delta T^\circ$  - фиг.3.9-а.



Фиг.3.9. Температурни напряжения

Реакциите в двата края не могат да се определят чрез уравненията на статиката – в случая само едно. Тъй като прътът не може да се деформира в надлъжно направление, то очевидно  $\Delta l = 0$ . Като използваме зависимостта 3.15, ще получим:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} + \alpha l \Delta T^\circ = 0 \rightarrow N = -EF\alpha \Delta T^\circ \rightarrow \sigma = \frac{N}{F} = -E\alpha \Delta T^\circ$$

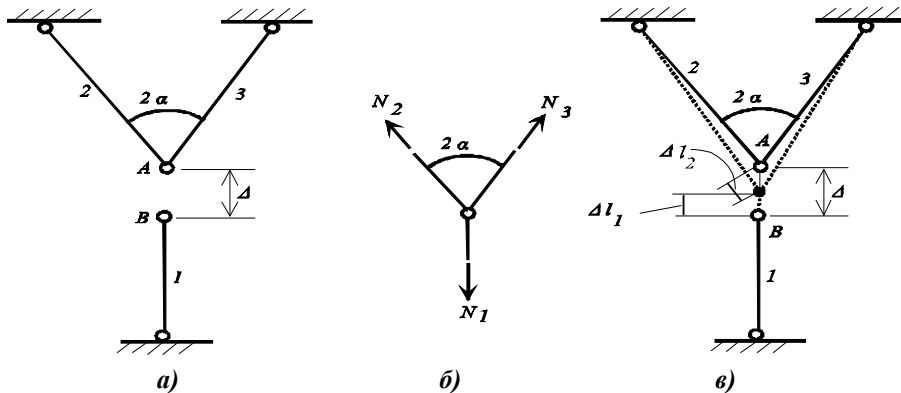
От получения израз следва, че напряженията не зависят нито от напречното сечение на пръта, нито от неговата дължина. Това е така, защото както видяхме, в осово направление прътът може да се разгледа като съвкупност от нишки, несвързани една с друга. Ако заместим по-горе данните за стомана ( $E=200 \text{ GPa}$ ,  $\alpha=12 \cdot 10^{-6}$ ) при температурна разлика  $\Delta T^\circ = +100$  градуса за напряжението ще получим  $\sigma = 200 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 240 \text{ MPa}$ . Вижда се, че температурното натоварване може да предизвика значителни напряжения.

За да се намалят температурните напрежения за конструкции, работещи на открито, може да се направи извода, че най-подходящо време за техния монтаж ще бъде средната за съответния регион температура на въздуха – тогава температурната разлика през лятото и зимата ще бъде еднаква. Например, ако максималната температура през лятото е 40 градуса, а минималната температура през зимата е -20 градуса, то най-подходящата температура за монтаж ще бъде 10 градуса

Ако прътът е свободен за разширение – фиг.3.9-б, тогава прътът се удължава свободно без да се появят напрежения. Температурното удължение ще определим с второто слагаемо на формула 3.15. Така например за 10 метрова стоманена релса при 50 градуса температурна разлика ще получим следното удължение:  $\Delta l = \alpha \Delta T^{\circ} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 50 = 0,006 m = 6 mm$ . Ако това разстояние не бъде оставено между релсите, при нагриването им те ще се допрат взаимно и ще се получи схемата на фиг.3.9-а, при което появилите се натискови сили могат да предизвикат изкривяване на релсата. За свободното разширение на релсата освен необходимото разстояние в краищата, следва да се осигурят и специални захващащи устройства за свободно плъзгане при разширението и.

### Пример 3.6. Монтажни напрежения

При съединяването на три еднакви пръта се оказало, че единият от тях е по-къс с величината  $\Delta$  – фиг.3.10. Да се определят напреженията в прътите след съединяването им.



Фиг.3.10. Монтажни напрежения

Поради симетрията,  $N_2=N_3$ . В съединено състояние за равновесието на възела можем да запишем:

$$N_1 - 2N_2 \cos \alpha = 0 \quad \text{a)}$$

С това уравнение не могат да се определят двете неизвестни. Следователно задачата е един път статически неопределена. Недостигащото уравнение е деформационната зависимост между удълженията на прътите, която може да се проследи от фиг. 3.10-в.

$$\Delta l_1 + \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha} = \Delta$$

Заместваме удълженията с физическите зависимости 3.15 и получаваме:

$$\frac{N_1 l}{EF} + \frac{N_2 l}{EF \cos \alpha} = \Delta \quad \text{б)}$$

След решаване на системата уравнения а) и б), получаваме:

$$N_1 = \frac{2\Delta EF \cos^2 \alpha}{l(1 + 2 \cos^2 \alpha)} \quad N_2 = N_3 = \frac{\Delta EF \cos \alpha}{l(1 + 2 \cos^2 \alpha)}$$

Ако положим  $\alpha=60$  градуса, ще получим, че:

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{\Delta EF}{3l}$$

Съвпадението на трите нормални сили се получава, защото при  $\alpha=60$  градуса,  $2\alpha=120$  градуса, т.е. трите пръта са разпределени равномерно по кръг през 120 градуса.

Ако приемем за дължината на прътите  $l=1$  m, напречно сечение  $1$   $cm^2$  и неточност само  $1$  mm, за усилията в прътите ще получим (при  $\alpha=60$  градуса):

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{\Delta EF}{3l} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-4}}{3} = 6666,6 N$$

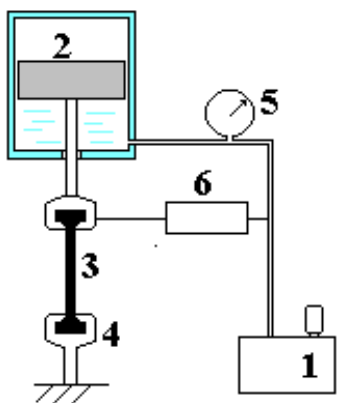
Виждаме, че усилията не са малки. Те ще предизвикат напрежение от  $66,6$  MPa във всеки прът. При неточност от  $5$  mm, може да се очаква, че при опит да бъдат монтирани, прътите ще се скъсат.

Понякога нарочно се създават неточности – например при пресовите съединения. При всички случаи обаче напреженията следва да бъдат пресметнати преди монтажа.

### 3.4. Изпитване на материалите на опън / натиск

Изпитването на опън е основно изпитване на повечето материали – стомани, пластмаси, дървесина, текстил и други. За всеки материал има

разработени стандарт, където са описани основните правила на изпитването. Например за изпитване на метали съществува стандарт БДС 2734-83.



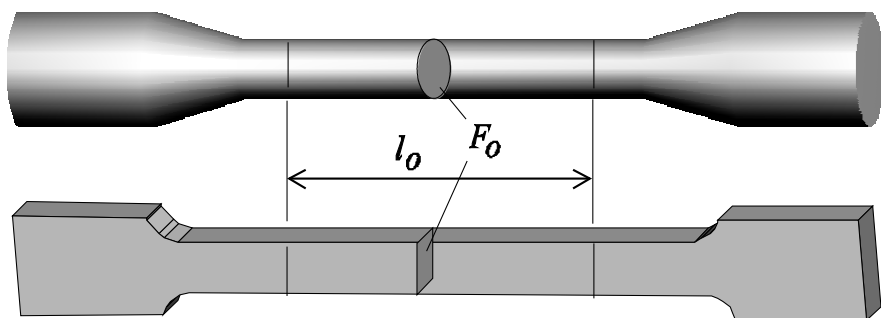
**Фиг.3.11. Схема на машина за изпитване на опън**

приложената сила на опън. Това става автоматично на специална скала (5). Всяка машина има т.н. диаграмен апарат (6), където автоматично се записва кривата между приложената сила и удължението на образеца.

Днес се произвеждат машини, които могат да произведат сила от няколко килограма до сто тона. По-модерните машини се управляват програмно и позволяват изменение на скоростта на натоварване, осъществяване на натоварване по предварително зададен закон и др. С не много сложни приспособления същите машини могат да се използват за изпитване на материалите на натиск и огъване.

### **Б) Образци за изпитване**

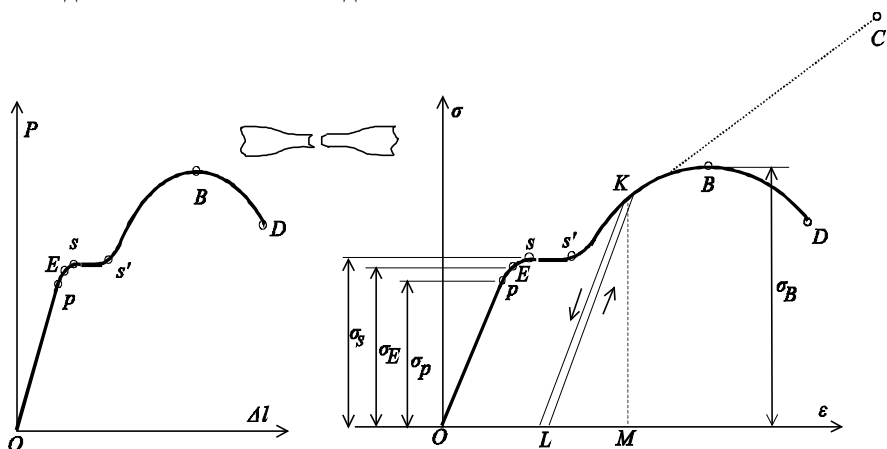
За всеки материал се подготвят специални образци (епруветки), формата и размерите на които се регламентират в съответен стандарт. Например за метални образци съществува БДС 1086-76. Употребяват се два вида образци – с кръгло и с правоъгълно сечение – фиг.3.12. Определен проблем представлява начина на захващане на образеца към челюстите на машината. За по-отговорни изпитания за предпочитане е ставно захващане, което осигурява центрично прилагане на опъновата сила.



Фиг.3.12. Образци за изпитване на опън

**В) Диаграма на опън**

При изпитване на нисковъглеродна стомана примерната зависимост между приложената сила на опън  $P$  и удължението  $\Delta l$  на образеца има вида, показан на фиг.3.13. Ако разделим приложената сила на началното напречно сечение  $F_0$ , а измереното удължение  $\Delta l$  на началната дължина  $l_0$  (отбелязва се на епруветката преди изпитанието), по ординатната ос ще получим напрежението  $\sigma$ , а по абсцисната ос – относителната деформация  $\varepsilon$ . Тъй като  $F_0$  и  $l_0$  са почти константи до  $m.B$ , то диаграма  $P-\Delta l$  и диаграма  $\sigma-\varepsilon$  до  $m.B$  качествено съвпадат.



Фиг.3.13. Диаграми на опън  $P-\Delta l$  и  $\sigma-\varepsilon$  за нисковъглеродна стомана

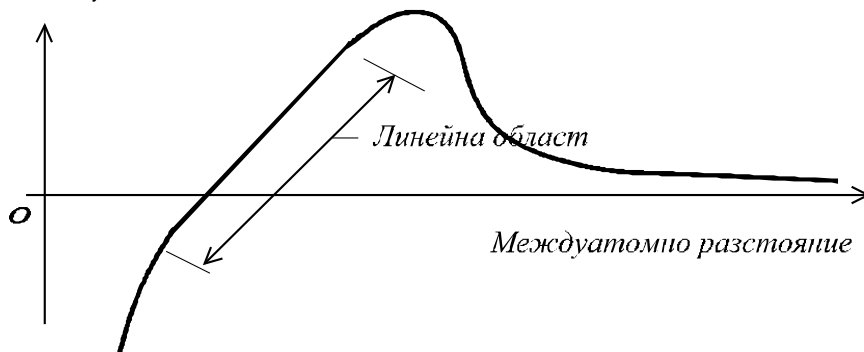
В тези диаграми са характерни няколко точки и области, които ще коментираме.

Най-голямото напрежение, до което зависимостта между напрежение и деформации е линейна ( $m.P$ ), наричаме **граница на**

**пропорционалност** и бележим с  $\sigma_p$ . В зоната  $OP$  е валиден закона на Хук  $\sigma = E\varepsilon$ .

Линейността между приложената сила и удължение се дължи на характера на междуатомните сили, чиито зависимости от разстоянията между атомите са подобни на графиката, показана на фиг.3.14 – [6].

*Междуатомна сила*



**Фиг.3.14. Зависимост “Сила на привличане/отблъскване - Разстояние между атомите”**

След т. $P$  диаграмата леко се изкривява. В т. $E$  получаваме т.н. **граница на еластичност** -  $\sigma_E$ , която е най-голямото напрежение, до което в материала се получават само еластични деформации. Ако снемем натоварването в т. $E$ , епруветката възвръща изцяло първоначалните си размери. След т. $E$  това вече е невъзможно.

В т. $S$  получаваме т.н. **площадка на провлачване** на материала. Видно от диаграмата, в определен интервал удължението на образеца нараства без да се увеличава силата. Материалът започва да “тече” подобно на течност. Напрежението в тази точка наричаме **граница на провлачване** и бележим със  $\sigma_s$ .

Площадката на провлачване не е еднаква за различните материали. За някои материали тя въобще липсва, затова за тях се приема **условна граница на провлачване**  $\sigma_{0,2}$ , която представлява напрежението, при което се получава остатъчна относителна линейна деформация 0,2 %.

На какво се дължи площадката на провлачване? Преди всичко – на несъвършенствата в кристалната структура на металите. Известно е, че в структурата на металите съществуват т.н. **дислокации** - места, където регулярната подредба на кристалите се нарушава. На тези места връзката между атомите е по-слаба. При нарастване на силите на опън става преплъзгване по определени “слаби” места - равнини на кристалната решетка, които сключват ъгъл около 45 градуса с оста на пръта ( в раздел

3.1 видяхме, че в тези равнини се пораждат максималните напрежения на срязване). При добре шлифована плоска епруветка тези линии могат да се забележат върху епруветката с просто око. Тези ивици се наричат **ивици на Людерс-Чернов**, открити от тях независимо един от друг съответно през 1859 и 1884 г.

Наличието на площадката на провлачване в металите определя техните пластични свойства и възможността за пластична обработка в студено състояние – изтегляне, шанцоване, огъване и др.

След т.*S'* в структурата на метала е извършено преподреждане на атомите, дислокациите са “изхвърлени“. Напреженията започват да растат отново. Зоната *S'B* се нарича **зона на уякчаване** на материала.

В зоната на уякчаване се наблюдава интересно свойство. Ако в т.*K* снемем натоварването, то разтоварването става по правата *KL*, успоредна на правата *OP*, където е валиден закона на Хук. Еластичната деформация е отсечката *LM*, а отсечката *OL* съответства на пластична, необратима деформация.

Ако повторно натоварим образеца, (след като сме стигнали т.*K* и сме го разтоварили), то зависимостта между напрежението и деформацията се осъществява по правата *LK* (По-точното измерване показва, че линията *KL* при разтоварване и *LK* при натоварване оформят една малка хистерезисна елипса). След достигане на т.*K*, зависимостта продължава по кривата *S'B*, както ако натоварването не е свалено. Но се вижда, че зоната на пропорционалност между напрежение и деформация на материала значително се е увеличила ( $LK > OP$ ). Това явление се нарича **наклеп** и се използва широко в практиката за повишаване на границата на пропорционалност – корабни вериги, арматурна тел и др. Явлението е било открито за пръв път през 1831 г. от **Ф. Херстнер** (1756-1832).

В т.*B* силата престава да расте. Разстоянията между атомите са нараснали толкова много, че силите на привличане са сведени до нула – фиг.3.14. Тук започва да се оформя мястото на скъсването във вид на **шийка**. Напречното сечение бързо изтънява и епруветката се скъсва в т.*D* при сила, малко-по-малка от тази в т.*B*. Формата на скъсаната епруветка има вида, показан на фиг.3.13. Налице са площадка на преплъзгване (в краищата - под 45° спрямо оста на епруветката) и площадка на разкъсване – в центъра на епруветката.

Напрежението в т.*B* наричаме **граница на разрушение** и бележим с  $\sigma_B$ . Това е максималното напрежение, което материалът на епруветката може да издържи. То се нарича още **временно съпротивление** или **кратковременна якост на опън**.



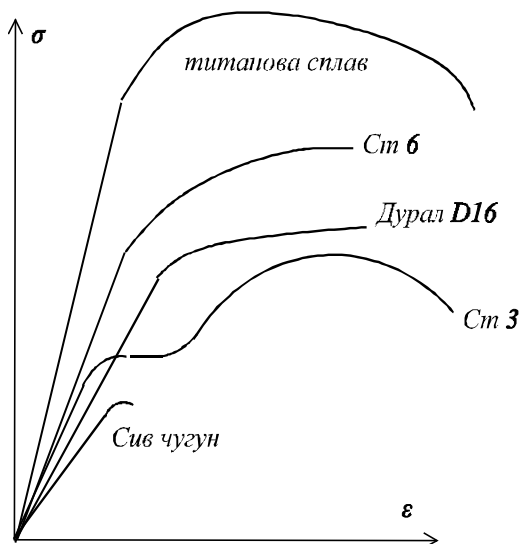
От т.В до т.Д, диаграмата  $\sigma - \varepsilon$  носи условен характер, защото напречното сечение силно е намаляло. Истинското напрежение обаче расте и истинската диаграма  $\sigma - \varepsilon$  се движи по линията В-С. **Истинското напрежение** в момента на скъсване ще получим, като разделим силата в т.Д на площта на шийката, получена след разрушението  $\sigma_{ист} = P_D / F_{шийка}$ .

Напреженията  $\sigma_p$ ,  $\sigma_e$ ,  $\sigma_s$  и  $\sigma_b$  се наричат **механични характеристики** на материалите и се привеждат в специализирани справочници -  $\sigma_b$  за всички материали, а  $\sigma_s$  - само за материали, имащи площадка на провлачване - виж Приложение 2. Напрежението  $\sigma_e$  е трудно за измерване и рядко се дава в справочниците.

Всички изброени по-горе показатели са свързани с якостните свойства на материала. Деформационните му свойства се определят с т.н. **относително удължение при скъсване**, което се определя по израза:

$$\delta \% = \frac{\Delta l_D}{l_0} \cdot 100 \quad [\%] \quad (3.19)$$

където  $l_0$  – работна дължина на епруветката,  $\Delta l_D$  – удължение на епруветката след скъсването.



**Фиг.3.15. Сравнение между диаграмите на опън за различни видове метали**

поведение, т.е. за всички в началния стадий на натоварване е справедлив законът на Хук. След това повечето нямат явно изразена площадка на

Освен относителното удължение, дефинира се и **относително напречно свиване**, което се изчислява по израза:

$$Z \% = \frac{F_u - F_0}{F_0} \cdot 100 \quad [\%] \quad (3.20)$$

където  $F_0$ ,  $F_u$  – първоначална площ на напречното сечение на епруветката и площ на сечението на шийката след разрушаване.

На фиг. 3.15 са приведени диаграмите на опън за няколко вида метали. Общото в тях е, че всички имат линейна област на

провлачване, а диаграмата на опън на чугун показва, че същият се разрушава при много ниски напрежения и деформации.

### **Г) Понятие за жилавост, крехкост и твърдост**

Последните два показателя (3.19 и 3.20) определят две важни свойства на материалите – **жилавост и крехкост**. **Жилавост** е свойството на материала да поема големи деформации без да се разрушава или да се разрушава при голямо относително удължение – 20 и повече процента. Такива метали са алуминия, медта (отвърнатата), нисковъглеродната стомана и др.

**Крехкост** е свойството на материала да се разрушава при малки деформации. Както се вижда от определението, това свойство е обратно на жилавостта. Няма точно определена граница между жилавите и крехките материали. Но за крехки материали могат да се приемат чугуна, високовъглеродната стомана, стъклото, керамиката и др.

Жилавостта и крехкостта обаче не са свързани само с материала, а и с условията на натоварване. Един и същ материал при определени условия може да се разруши като жилав, а при други условия – като крехък. Затова е по-правилно да се говори за **жилаво и крехко разрушение**.

При производството на отговорни, силно натоварени детайли винаги следва да се проверяват експериментално заложените в изчисленията якостни характеристики на материала. Но доколкото това е невъзможно за всеки детайл, се използва друг, по-лесен и бърз начин на проверка без разрушение на детайла – чрез измерване на твърдостта му.

**Твърдост** наричаме свойството на материала да се съпротивява против проникването на други тела в него. На практика това се извършва с несложни машини, които с прост лостов или хидравличен механизъм натискат по повърхността на детайла малка сфера, пирамида или конус. По големината на отпечатъка (или проникването) може да се съди за твърдостта на материала. Твърдостта на металите се измерва в единици по **Бринел** (сферичен отпечатък, 1901), **Викерс** (отпечатък на правоъгълна пирамида, 1920) или **Роквел** (коничен отпечатък, 1920). Съществуват таблици за всеки материал, по които чрез измерената твърдост може да се съди за якостните показатели на материала. Така например границата на разрушение  $\sigma_B$  (в  $MN/m^2$ ) на даден материал може да се определи чрез твърдостта му по Бринел  $H_B$  ( $kg/mm^2$ ) по следната формула - [34]:

$$\sigma_B = K \cdot H_B$$

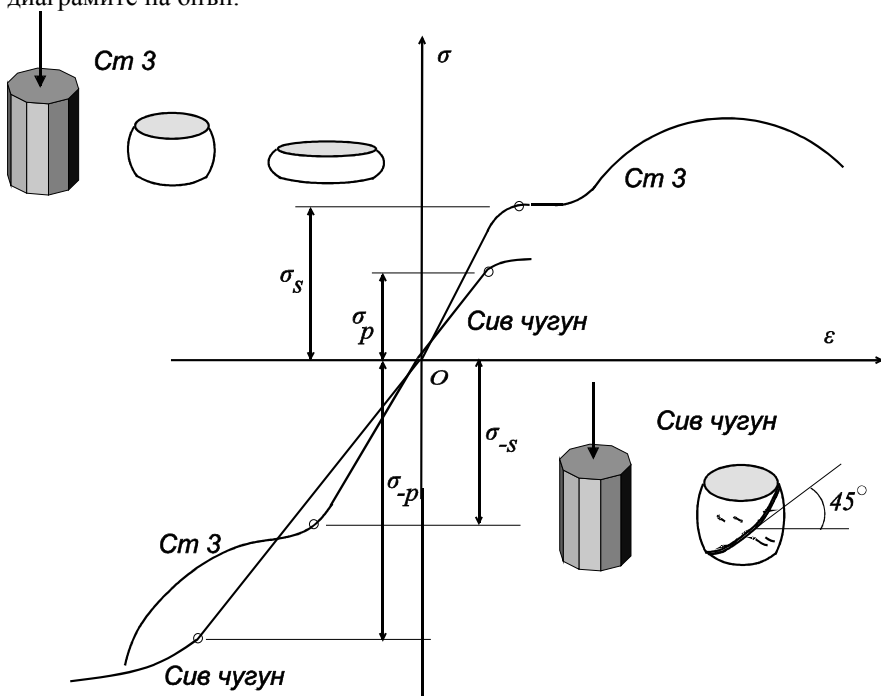
където:  $K=3,4-3,9$  – безразмерен коефициент.

За много меките материали като гума, полиуретан и др. твърдостта се измерва в единици по **Шор**.

### **Д) Диаграма на натиск**

За изпитание на натиск на метали се подготвят къси цилиндрични образци, за да се избегне загубата на устойчивост ( $l=d=20\text{ mm}$  или  $6\text{ mm}$ ). За други материали се подготвят образци във вид на куб (за дърво страната на куба е-  $50\text{ mm}$ , а за бетон -  $200\text{ mm}$ ).

Поведението на жилавите и крехките материали при натиск е твърде различно. На фиг.3.16 са показани примерния вид на поведението и диаграмите за жилав материал - Ст3 и крехък материал – Сч (сив чугун). За сравнение с поведението на тези материали при опън са приведени и диаграмите на опън.



**Фиг.3.16. Диаграма на натиск за жилав и крехък материал**

Опитът показва, че жилавият материал не може да се разруши, а се сплесква, докато крехкият материал се разрушава по площадката с максимални тангенциални напрежения, сключваща с оста на епруветката ъгъл около 45 градуса. Освен това, оказва се, че диаграмите на опън-натиск на жилавия материал до границата на провлачване са симетрични (напреженията  $\sigma$ , при опън и натиск са равни по модул), докато за крехкият материал диаграмите на опън и натиск са несиметрични. Крехкият материал

се съпротивлява на натиск много по-добре, отколкото на опън. Така например границата на разрушение при натиск за чугун е  $500-1500 \text{ MPa}$ , а при опън –  $120-380 \text{ MPa}$  – разликата е 4-5 пъти. Поради тази причина крехките материали се употребяват главно за детайли и елементи, натоварени главно на натиск – колони, стени и др.

### ***Е) Влияние на различни фактори върху механичните характеристики на материалите***

Температурата е един от основните фактори, който влияе върху механичните характеристики на материалите. Изложените по-горе данни за съпротивлението на материалите при опън - натиск се отнасят за т.н. **стайна температура**, която се приема за  $20^\circ \text{ C}$ . Много детайли обаче работят при високи температури (двигатели с вътрешно горене, газови и парни турбини), а някои строителни конструкции работят при ниски температури. При ниски температури някои материали, като високовъглеродните стомани, проявяват т.н. **студена трошливост** (придобиват свойства на крехък материал). Така например, според последните изследвания на потъналия през 1912 г кораб 'Титаник' (при което са загинали близо 800 души), направени с помощта на дълбоководен робот през 1985 г., показват, че корабът не е получил никаква пробойна от удар с айсберг, както се мислеше до неотдавна. Изследванията на отломки от корпуса, изработен от високовъглеродна стомана (която има по-голяма якост и затова е била предпочетена), са показали, че по всяка вероятност става дума за крехко разрушение от удара при скорост 22 възела и температура  $31^\circ \text{ F}$  ( $1^\circ \text{ C}$ ) – [35], при което в корпуса на кораба се е образувала пукнатина, през която е нахлула водата. Днес високовъглеродни стомани повече не се използват за корабни корпуси.

Освен това някои детайли се товарят **статично**, а други **динамично**. Оказва се, че материалите се съпротивляват по различен начин при бавно и бързо деформиране.

Друг фактор, който влияе върху механичните показатели на материалите е **технологията на обработка** на материалите: коване, леене, валцоване, изтегляне, пресоване, заваряване, шамповане, рязане и др. Силно влияние върху тези показатели оказва и различните видове **термообработка**, като: закаляване, циментация, отпускане, отвърщане, стареене и др. В някои конструкции, като атомните реактори и електростанции определено влияние оказва и **радиактивното облъчване** на материалите.

Не може да се даде еднозначна оценка за влиянието на тези фактори върху механичните показатели. За различни материали понякога те могат да влияят в противоположни посоки. Затова най-сигурно е

количествената оценка на тези фактори върху механичните характеристики да се оценява по справочници за съответните материали.

Времето е също важен фактор върху поведението на материалите. С течение на времето се оказва, че в една конструкция могат да се променят както деформациите, така и напреженията. Това поведение на материалите се нарича **пълзене** на материалите.

Ако един детайл се намира под непрекъснато постоянно натоварване в продължение на дълго време (години), оказва се, че първоначалната деформация не остава една и съща – тя расте необратимо. Това явление се нарича **последствие**. То се проявява по-силно при висока температура. Пример за това явление могат да бъдат лопатките и дисковете на турбини, които работейки в полето на центробежните сили и високи температури, след време се оказват необратимо разтеглени.

Обратно, ако детайлът се намира натоварен при постоянна деформация, оказва се, че след време напреженията в него силно спадат. Това явление се нарича **релаксация на напреженията**. Има място във всички болтови връзки, особено при по-високи температури. Типичен пример за релаксацията на напреженията е разхлабването на болтовата връзката между ауспухната тръба и изходящия колектор на двигателя с вътрешно горене.

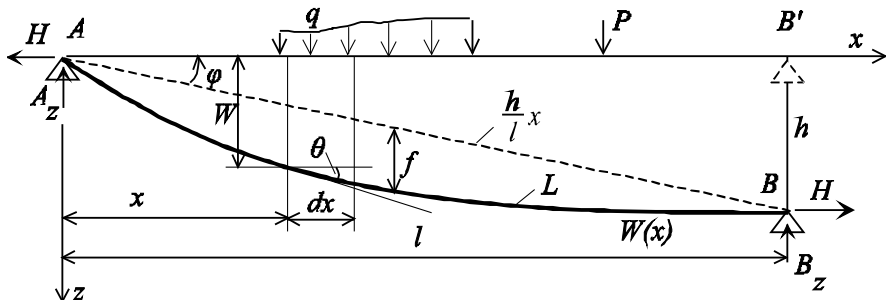
Как ще използваме получените резултати от изпитанията на опън и натиск, ще покажем в гл.5.

### 3.5. Гъвкави нишки и въжета

**Нишка** наричаме тяло с постоянно напречно сечение, дължината на което е много пъти (над сто пъти) по-голяма от напречния му размер. При такива размери, нишката може лесно да се огъва. Единственото съпротивление на нишката е съпротивлението на опън.

Конструкции, в които основните носещи елементи са нишки, се наричат **въжени** или **вантови** конструкции. Такива са въжените мостове, носещи конструкции на покривни съоръжения (като Милениума в Лондон) и др. Както беше отбелязано в началото на тази глава, при тези конструкции се постига 100 процентово използване на носещата способност на материала и затова те са относително много по-леки (и съответно икономични) спрямо други конструкции от тип греди, рамки и черупки. Въжени конструкции са също електропроводите, въжени линии и др. Веригите, съставени от голям брой малки звена, които могат да се завъртват свободно помежду си, също се отнасят към гъвкавите нишки. В природата също съществуват такива конструкции – паяжината е вид вантова конструкция.

Основното затруднение при анализа на гъвкавите нишки идва от факта, че те са **геометрически изменяеми**. Равновесната форма при тях зависи от натоварването.

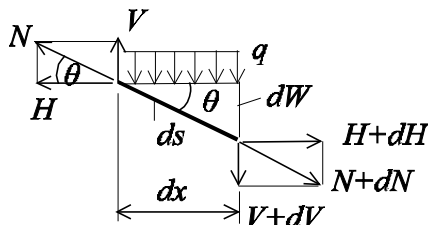


Фиг.3.18. Нишка – основни означения

Ще разгледаме нишка, закрепена между две неподвижни опори, които могат да са на различни нива – фиг.3.18. Разстоянието между опорите, мерено по хоризонталата -  $l$ , наричаме **отвор** на нишката, Разстоянието между опорите, мерено по вертикалата -  $h$ , наричаме **денивелация**. Правата линия  $AB$  при опори с различно ниво наричаме **хорда**. Ъгълът на наклона на хордата бележим с  $\varphi$ . **Дължината** на напрегнатата окачена нишка означаваме с  $L$ , а на ненапрегнатата (откачена) нишка означаваме с  $L_0$ . Максималното провисване на нишката спрямо хордата наричаме **стрелка** -  $f$ .

Нишки, при които отношението  $f/l$  е малко число ( $\leq 0,1$ ) се наричат **нишки с малко провисване**. Те се срещат по-често и могат да се изследват с т.н. **техническа теория**. Ако  $f/l > 0,2$ , имаме **нишки с голямо провисване**, за които се използва т.н. **точна теория**, която е доста сложна. Ние ще се спрем на техническата теория на нишките, при неголям ъгъл на наклона на хордата. При тези предпоставки вертикалното натоварване върху нишката може да се приложи върху заместваща фиктивна греда  $AB'$  – фиг.3.18.

#### А) Диференциално уравнение на нишката



Фиг.3.19

Да разгледаме равновесието на елемент от нишката с дължина  $ds$  – фиг.3.19. Разлагаме нормалната сила  $N$  в нишката на хоризонтална компонента ( $H$ ) и вертикална компонента ( $V$ ). Условието за равновесие на елемента са:

$$\begin{aligned}
\sum X = 0 &\rightarrow H + dH - H = 0 \\
&\rightarrow dH = 0 \rightarrow H = const \\
\sum Z = 0 &\rightarrow V + dV + qdx - V = 0 \\
&\rightarrow \frac{dV}{dx} = -q
\end{aligned}
\tag{3.21}$$

Получихме, че хоризонталната компонента  $H$  на нормалната сила е постоянна по цялата дължина на нишката, а значи и хоризонталните реакции в опорите са винаги равни помежду си. Тези реакции обаче не могат да се определят чрез уравненията на статиката.

Приемаме координатна система  $XZ$  с начало в по-високата опора, като ос  $X$  е хоризонтална, а ос  $Z$  – вертикална. Нека преместването на нишката по вертикалата, мерено от ос  $X$ , бъде  $W$ . От фиг.3.18 и фиг. 3.19 следва:

$$\frac{dW}{dx} = tg\theta ; \quad \frac{V}{H} = tg\theta ; \quad \rightarrow \quad \frac{dW}{dx} = \frac{V}{H}
\tag{3.22}$$

След диференциране на 3.22 и използване на 3.21 получаваме:

$$\frac{d^2W}{dx^2} = -\frac{q}{H}
\tag{3.23}$$

Това е диференциалното уравнение на неразтеглива нишка (еластичните деформации на нишката са пренебрегнати).

### **Б) Определяне на провисването на нишката**

При  $q=const$  уравнение 3.23 има просто решение. Ако натоварването е сложно (например имаме няколко силови участъка), за решение на диференциално уравнение 3.23 може да се използва аналогията му с диференциалното уравнение 3.24, което се получава от диференциалните зависимости на **Журавски** за права греда:

$$\frac{dQz}{dx} = -q(x) \quad \frac{dMy}{dx} = Qz(x) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -q(x)
\tag{3.24}$$

Виждаме, че диференциалните уравнения 3.23 и 3.24 качествено съвпадат. Разликата се състои единствено в това, че в уравнение 3.23 разпределеният товар е разделен с константата  $H$ . Следователно методите, които знаем за решение на 3.24, могат да се приложат и за 3.23. Но да решим 3.24 означава да намерим огъващия момент от външното натоварване. Това може да стане с методите за определяне на разрезните усилия. Следователно, на основание на аналогията, преместването и ъгълът

на наклона в нишката ще бъдат разрезните усилия  $M'$  и  $Q'$  в заместващата греда, разделени на  $H$ :

$$W = \frac{h}{l}x + \frac{M'}{H}; \quad \frac{dW}{dx} = \operatorname{tg}\theta = \frac{h}{l} + \frac{Q'}{H} \quad (3.25)$$

където  $M'$ ,  $Q'$  - са разрезните усилия в заместващата хоризонтална греда на нишката, която е с дължина  $l$ , ставно подпряна в двата си края и натоварена със същият товар, както нишката. Тук в уравнението за преместването е добавено уравнението на хордата, тъй като тя не влиза в огъващия момент.

Стрелката на провисване ще определим като от пълното провисване  $W(x)$  извадим уравнението на хордата:

$$f = W_{\max} - \frac{h}{l}x = \frac{M'_{\max}}{H} \quad (3.26)$$

### **В) Определяне на силата в нишката**

От фиг.3.19 следва:

$$N = \frac{H}{\cos\theta} = H\sqrt{1 + (\operatorname{tg}\theta)^2} = H\sqrt{1 + \left(\frac{dW}{dx}\right)^2} \quad (3.27)$$

Като използваме израза 3.29, ще получим:

$$N = H\sqrt{1 + \left(\frac{h}{l} + \frac{Q'}{H}\right)^2} \quad (3.28)$$

### **Г) Определяне дължината на провисналата нишка**

Очевидно дължината на провисналата (напрегнатата) нишка при всички случаи трябва да е по-голяма от разстоянието между опорите или поне равна на това разстояние.

От фиг.3.19 виждаме, че:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dW)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dW}{dx}\right)^2} = dx\left(1 + \left(\frac{dW}{dx}\right)^2\right)^{1/2} \approx dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2\right) \quad (3.29)$$

Тук сме използвали първите два члена от разложението на квадратния корен в степенен ред. Пълната дължина на нишката, на основание на 3.29, ще бъде:



$$L = \int_0^l ds = \int_0^l \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{dx} \right)^2 \right) dx = \dots = l + \frac{h^2}{2l} + \int_0^l \left( \frac{h}{l} \frac{Q'}{H} + \frac{Q'^2}{2H^2} \right) dx \approx l + \frac{h^2}{2l} + \frac{1}{2H^2} \int_0^l Q'^2 dx \quad (3.30)$$

Дължината на ненапрегнатата нишка ще получим, като от дължината на напрегнатата извадим еластичното удължение:

$$L_0 = L - \Delta L = L - \int_0^l \frac{N}{EF} dx \quad (3.31)$$

Както се вижда, всички величини – преместването, нормалната сила и дължината на нишката зависят от хоризонталната сила  $H$ . При решаването на конкретни задачи една от величините –  $H$ ,  $L$  или  $f$  се задава по условие. Другите се определят на основание на изведените уравнения.

**Д) Частен случай: Нишка с денивелация на опорите и равномерно разпределен товар  $q$ .**

Тук  $q$  е вертикалното разпределено натоварване от собственото тегло на нишката и равномерно разпределени сили от други товари като теглото на леда при обледяване и др.

Уравнението на огъващия момент и сръзващата сила на заместващата греда имат вида:

$$M' = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad Q' = \frac{ql}{2} - qx \quad (3.32)$$

Преместването ще получим на основание на 3.25:

$$W = \frac{h}{l} x + \frac{1}{H} \left( \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \quad (3.33)$$

До същия резултат стигаме, ако решим директно диференциално уравнение 3.23 при гранични условия  $W(0)=0$  и  $W(l)=h$ .

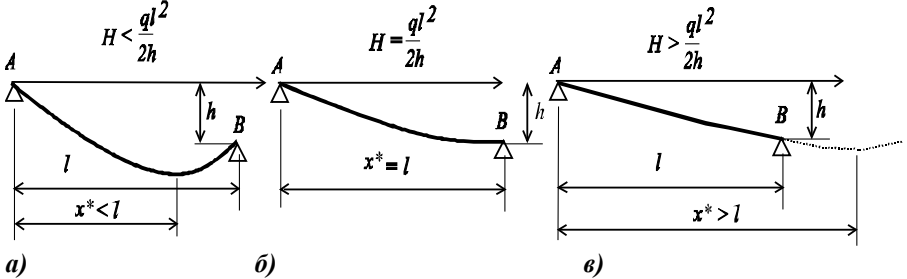
За да получим максималното преместване на нишката, изследваме уравнение 3.33 за максимум:

$$\frac{dW}{dx} = 0 \rightarrow \frac{1}{H} \left( \frac{ql}{2} - qx \right) + \frac{h}{l} = 0 \rightarrow x^* = \frac{l}{2} + \frac{Hh}{ql} \quad (3.34)$$

Максималното значение на преместването ще бъде (заместваме 3.34 в 3.33)

$$W_{\max} = \frac{ql^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2ql^2} + \frac{h}{2} \quad (3.35)$$

От 3.35 виждаме, че мястото на максимума зависи от хоризонталната сила  $H$ . Според значението на тази сила са възможни три случая – фиг. 3.20: Максимумът е между опорите – фиг.3.20-а; Максимумът е в по-ниската опора – фиг.3.20-б; Максимумът е извън опорите – фиг.3.20-в.



Фиг.3.20

Провисването на произволна точка спрямо хордата ще определим като разлика между провисването на нишката и уравнението на хордата:

$$f_{(x)} = W_{(x)} - \frac{h}{l}x = \frac{1}{H} \left( \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right)$$

Максимумът на тази функция е стрелката на провисването и е винаги по средата на нишката, независимо от денивелацията на опорите:

$$f = \frac{ql^2}{8H} \quad (3.36)$$

Дължината на нишката на основание на 3.30 ще бъде:

$$L = l + \frac{h^2}{2l} + \frac{q^2l^3}{24H^2} \quad (3.37)$$

Като вземем предвид 3.36, дължината на нишката може да се изрази чрез стрелката на провисване:

$$L = l + \frac{h^2}{2l} + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l} \quad (3.38)$$

Нормалната сила на основание на 3.28 ще бъде:

$$N = H \sqrt{1 + \left( \frac{h}{l} + \frac{Q'}{H} \right)^2} = H \sqrt{1 + \left( \frac{h}{l} + \frac{ql}{2H} - \frac{qx}{H} \right)^2} \quad (3.39)$$

**Е) Частен случай: Нишка с опори на едно ниво и равномерно разпределен товар  $q$ .**

Изразите за всички величини ще получим от предишния случай, полагайки в тях  $h=0$ .

За провисването от 3.33 получаваме:

$$W = \frac{1}{H} \left( \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \rightarrow W_{\max} = f = \frac{ql^2}{8H} \quad (3.40)$$

Нормалната сила получаваме от 3.39:

$$N = H \sqrt{1 + \left( \frac{ql}{2H} - \frac{qx}{H} \right)^2} \rightarrow N_{\max} = N|_{x=0} = \sqrt{H^2 + \left( \frac{ql}{2} \right)^2} \quad (3.41)$$

Дължината на нишката получаваме от 3.37 и 3.38:

$$L = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} = l + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l} \quad (3.42)$$

### **Ж) Влияние на температурата**

Ако означим всички параметри ( $q, N, H, f$ ) при температура  $T_1^\circ$  с индекс 1 (температура на монтажа на нишката), а при температура  $T_2^\circ$  с индекс 2, дължината на ненапрегнатата нишка в двете състояния ще се различава с температурното удължение:

$$L_{0,2} - L_{0,1} = \alpha l (T_2^\circ - T_1^\circ) \quad (3.43)$$

Заместваме 3.31 (със съответните индекси) в 3.43. В резултат за неизвестната величина от 3.43 получаваме нелинейно алгебрично уравнение, което за всеки конкретен случай е целесъобразно да се реши числено.

### **З) Якостно оразмеряване на нишката**

При всички случаи якостното оразмеряване се извършва чрез неравенството:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{F} \leq [\sigma] \quad (3.44)$$

Може директно да се проверява и максималната опънова сила:

$$N_{\max} \leq \frac{N_{\text{разр}}}{n} \quad (3.45)$$

където  $N_{\text{разр}}$  се дава от фирмите производители на въжета,  $n$  – коефициент на сигурност.

**И) Пример 3.7. Напрежения в кабела на висящ мост**

Да се определи напрежението в кабела (носещото въже) на висящ мост с отвор  $l=2 \text{ km}$  и стрелка  $f=170 \text{ m}$ , ако е известно, че разпределения товар е  $q=350 \text{ kN/m}$  и диаметъра на кабела е  $d=1,1 \text{ m}$  – фиг.3.2. (По данни на TV ‘Discovery channel’ такива са параметрите на висящия мост в Кобе-Япония).

В случая имаме нишка с опори на едно ниво, натоварена с равномерно разпределено налягане.

От 3.40 определяме хоризонталната сила в кабела:

$$H = \frac{ql^2}{8f} = \frac{350 \cdot 10^3 \cdot (2 \cdot 10^3)^2}{8 \cdot 170} = 1,029 \cdot 10^9 \text{ N}$$

Максималната сила в кабела определяме по 3.41:

$$N_{\max} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{ql}{2}\right)^2} = \sqrt{(1,029 \cdot 10^9)^2 + \left(\frac{350 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{2}\right)^2} = 1,087 \cdot 10^9 \text{ N}$$

Напрежението в кабела ще бъде:

$$\sigma_{ax} = \frac{N_{\max}}{2F} = \frac{4,1,087 \cdot 10^9}{2\pi \cdot 1,1^2} = 5,7 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 570 \text{ MPa}$$

Тук сме разделили силата на две, защото имаме два кабела. Якостта на опън за стоманени въжета може да достигне  $2500 \text{ MPa}$ , която е значително по-висока от полученото напрежение.

**К) Пример 3.8. Анализ на висяща въжена конструкция**

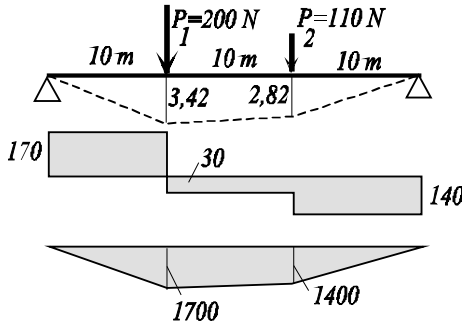
Да се определят усилието и стрелката във въжето на конструкцията, показана на фиг.3.21. Дадено:  $P_1=200 \text{ N}$ ,  $P_2=110 \text{ N}$ ; Разстояние между опорите  $l=30 \text{ m}$ ; Дължина на неокаченото въже  $L_0=31 \text{ m}$ .

Определяме разрезните усилия  $Q'$  и  $M'$  на заместващата греда – фиг.3.21. Прилагаме уравнение 3.30 за дължината на въжето, откъдето определяме хоризонталната сила:

$$L = l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l Q'^2 dx = l + \frac{1}{2H^2} I \rightarrow H = \sqrt{\frac{I}{2(L-l)}}$$

Интегралът решаваме чрез правилото на Верещагин, като умножим диаграма  $Q$  от фиг.3.21 сама на себе си:

$$I = 170 \cdot 10 \cdot 170 + 30 \cdot 10 \cdot 30 + 140 \cdot 10 \cdot 140 = 4,94 \cdot 10^5$$



Фиг.3.21

Заместваме по-горе и получаваме:

$$H = \sqrt{\frac{4,94 \cdot 10^5}{2}} = 497 \text{ N}$$

Нормалната сила във въжето ще определим по 3.28, където в случая  $h=0$ . По-голямата стойност на нормалната сила ще бъде в лявата опора, защото там  $Q'$  е най-голямо. Получаваме:

$$N_{\max} = H \sqrt{1 + \left(\frac{Q'}{H}\right)^2} = 497 \sqrt{1 + \left(\frac{170}{497}\right)^2} = 525 \text{ N}$$

Стрелката на провисване определяме по 3.26:

$$f = \frac{M'_{\max}}{H} = \frac{1700}{497} = 3,42 \text{ m}$$

Аналогично може да се определи преместването на приложената точка на втората сила.

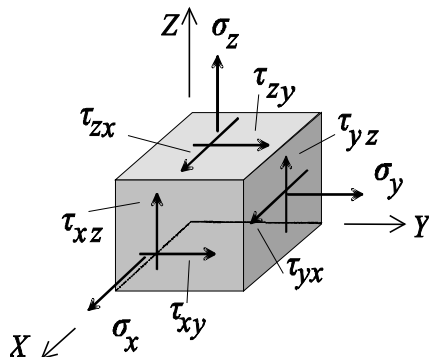
Деформираното състояние на въжето е показано на фиг.3.21 с пунктирна линия. За проверка на правилността на решението може да се сумират дължините на трите участъка на въжето в деформирано състояние. Тази сума трябва да е равна на 31 m.

## Гл.4. ВЪВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЯТА НА НАПРЕГНАТОТО И ДЕФОРМИРАНО СЪСТОЯНИЕ

### 4.1. Напрегнато състояние в точка

През произволна точка от напрегнато тяло могат да се прекарат различно ориентирани площадки. Ако площадката е ориентирана така, че нейната нормала е ос  $X$  на една предварително избрана правоъгълна

координатна система  $XYZ$ , както видяхме в гл.1, по площадката ще действуват едно нормално напрежение  $\sigma_x$  и две тангенциални напрежения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$  - фиг. 1.22.



**Фиг. 4.1. Напрегнато състояние в точка**

Тялото. Така върху видимите стени на кубчето действуват три нормални и шест тангенциални напрежения, които формират т.н. **тензор на напрегнатото състояние**:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Както се вижда от фиг.4.1, индексите на нормалните напрежения показват нормалите на площадките, върху които те действуват. Нормалните напрежения на видимите страни на кубчето са положителни, ако са насочени по положителните посоки на осите  $XYZ$ . Тангенциалните напрежения имат по два индекса – първият индекс показва нормалата на площадката, по която напрежението действува, а вторият индекс – направлението на действие. Тангенциалните напрежения на видимите страни на кубчето са положителни, ако са насочени по положителната посока на осите  $XYZ$ .

За да бъде кубчето в равновесие, е необходимо да са изпълнени условията на статиката – сумата от силите по ос  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  да са равни на нула и сумата от моментите около същите оси да са равни на нула.

Сумата от силите по осите ще бъде нула, ако на противоположните, невидимите площадки, действуват същите напрежения, както на видимите, но са обратно насочени. В действителност в общия случай те ще имат

По същия начин могат да се прекарат площадки, перпендикулярни на ос  $Y$  и ос  $Z$  и върху тях ще действуват също по едно нормално и две тангенциални напрежения. Ако в областта на точката изрежем елементарно кубче с размери  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ , върху стените му ще действуват също по едно нормално и две тангенциални напрежения – фиг.4.1, където са показани само напреженията върху видимите му стени.

Тук координатната система има за начало изследваната точка от

малки нараствания, които засега пренебрегваме. Колкото по-малки са размерите на кубчето, толкова по-точно ще е това допускане.

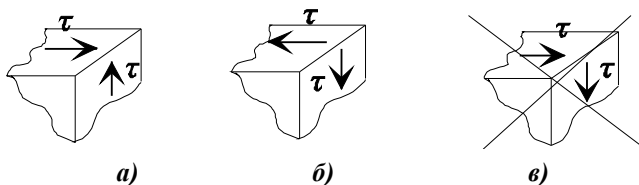
Що се касае до сумата от моментите около осите, нека вземем сумата от моментите около ос  $Z$ . Като вземем предвид, че на невидимите страни на кубчето действуват същите напрежения, както на видимите, но обратно насочени, неуравновесени моменти са:

$$(\tau_{xy} dydz) dx - (\tau_{yx} dx dz) dy = 0 \quad (4.2)$$

От тук получаваме, че  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Аналогично, записвайки моментните уравнения за другите две оси, ще получим окончателно:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (4.3)$$

Уравнения 4.3 изразяват т.н. **Закон за взаимност на тангенциалните напрежения** (ЗВТН). Този закон гласи: Тангенциалните напрежения върху две взаимно перпендикулярни площадки са винаги равни по големина и са или насочени към общия ръб на площадките, или “бягат” от общия ръб на площадките.



**Фиг. 4.2. Закон за взаимност на тангенциалните напрежения**

На фиг.4.2 – а) и б) са показани двата възможни случая. Третият случай в) е невъзможен, тъй като в този случай кубчето няма да е в равновесие.

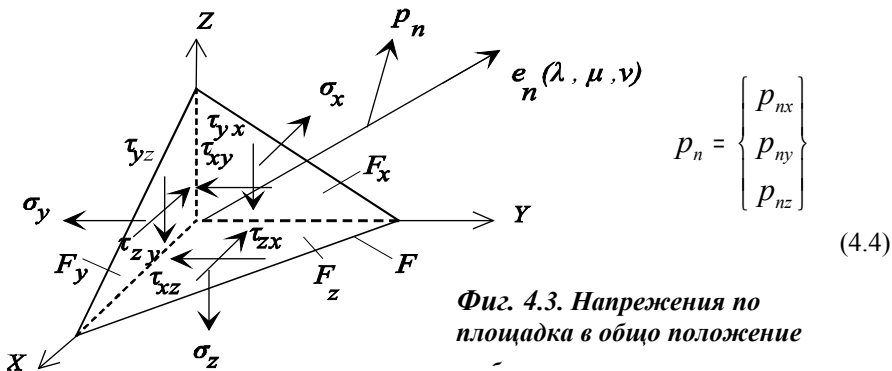
На основание на ЗВТН следва, че тензорът на напрегнатото състояние 4.1 е симетричен. Така в околността на точка в общият случай действуват общо шест независими напрежения – три нормални и три тангенциални напрежения.

#### 4.2. Напрежения по площадка в общо положение

Нека в околността на точка да е известен тензора на напрегнатото състояние  $T\sigma$  – 4.1. Задачата е да определим пълното, нормалното и тангенциалното напрежения по произволно наклонена площадка, нормалата на която има единичен вектор  $e$  с компоненти – косинус директорите  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$  - фиг.4.3.

Тази задача може да се реши само с уравненията на статиката. Наклонената площадка и невидимите площадки оформят един четиристен - тетраедър. Означаваме с  $F$  площта на наклонената площадка, а с  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  –

плоските на задните, невидимите площадки на тетраедъра. Върху предната площадка действа пълното напрежение  $p_n$ , което има три компоненти:



Върху задните, невидими площадки действуват деветте напрежения, формиращи тензора на напрегнатото състояние в точката – 4.1.

За равновесието на тетраедъра записваме сумата от силите по ос X:

$$\sum X = 0 \rightarrow p_{nx}F - \sigma_x F_x - \tau_{yx}F_y - \tau_{zx}F_z = 0$$

От тук:

$$p_{nx} = \sigma_x \frac{F_x}{F} + \tau_{yx} \frac{F_y}{F} + \tau_{zx} \frac{F_z}{F}$$

Като вземем предвид, че:

$$\lambda = \frac{F_x}{F} \quad \mu = \frac{F_y}{F} \quad \nu = \frac{F_z}{F}$$

получаваме:

$$p_{nx} = \sigma_x \lambda + \tau_{yx} \mu + \tau_{zx} \nu$$

Така получихме първата компонента на пълното напрежение. Формално тя се получава като се умножи първият ред на тензора 4.1 с  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$ . Аналогично се получават втората и третата компонента:

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \lambda + \tau_{yx} \mu + \tau_{zx} \nu \\ p_{ny} &= \tau_{xy} \lambda + \sigma_y \mu + \tau_{zy} \nu \\ p_{nz} &= \tau_{xz} \lambda + \tau_{yz} \mu + \sigma_z \nu \end{aligned} \quad (4.5)$$



Щом познаваме компонентите на пълното напрежение, можем да получим и неговия модул:

$$p_n = \sqrt{p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2} \quad (4.6)$$

За да намерим проекцията на пълното напрежение върху нормалата, което ще бъде както вече знаем нормалното напрежение върху площадката, ще умножим скаларно вектора пълно напрежение с единичния вектор на нормалата:

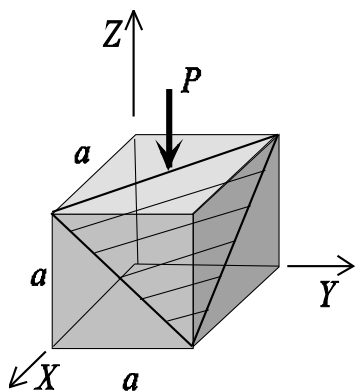
$$\sigma_n = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{e}_n = p_{nx}\lambda + p_{ny}\mu + p_{nz}\nu \quad (4.7)$$

Ако заместим тук компонентите на пълното напрежение с получените зависимости 4.5 и на основание на ЗВТН ще получим:

$$\sigma_n = \sigma_x\lambda^2 + \sigma_y\mu^2 + \sigma_z\nu^2 + 2\tau_{xy}\lambda\mu + 2\tau_{yz}\mu\nu + 2\tau_{zx}\nu\lambda \quad (4.8)$$

Като вземем предвид връзката между пълното, нормалното и тангенциалното напрежения върху произволна площадка 1.17, за модула на тангенциалното напрежение ще получим:

$$\tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2} \quad (4.9)$$



Фиг.4.4

**Пример 4.1.** При изпитание на натиск на циментов куб със страна  $a=10$  см, същият се разрушил по площадка, минаваща през диагонала на горната стена и диагоналите на две съседни вертикални стени при сила  $P=500$  kN – фиг.4.4. Да се определят пълното, нормалното и тангенциално напрежения по тази площадка в момента на разрушаване на куба.

По стените на куба ще действа единствено напрежението  $\sigma_z$ , което ще бъде равно на:

$$\sigma_z = -\frac{P}{a^2} = -\frac{50 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -50 \text{ MPa}$$

Площадката, по която кубът се е разрушил, е равнонаклонена спрямо координатните оси, следователно от свойството на косинус направляващите, че:

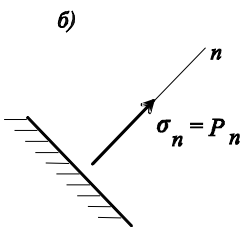
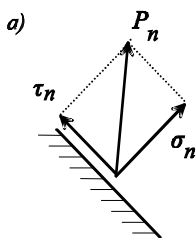
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 \rightarrow \lambda = \mu = \nu = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

С помощта на уравнения 4.5 и 4.6 определяме компонентите и модула на пълното напрежение:

$$p_{n,x} = 0, \quad p_{n,y} = 0, \quad p_{n,z} = \sigma_z y = -28,9 \text{ MPa}, \quad p_n = 28,9 \text{ MPa}$$

Нормалното и тангенциално напрежения по площадката ще определим чрез изразите 4.8 и 4.9:

$$\sigma_n = \sigma_z y^2 = -16,7 \text{ MPa} \quad \tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2} = 23,6 \text{ MPa}$$



**Фиг.4.5. Главни площадки и главни напрежения**

### 4.3. Главни площадки. Главни напрежения.

Нека да познаваме тензора на напрегнатото състояние 4.1 в дадена точка. По произволна площадка, прекарана през същата точка, видяхме, че в общия случай действува пълно напрежение, което има нормална и тангенциална компонента –

фиг.4.5–а. Поставяме въпроса: съществува ли площадка, прекарана през същата точка, по която пълното напрежение да съвпада с нормалата на площадката – фиг.4.5-б или по друг начин казано, върху площадката да няма тангенциално напрежение.

Допускаме, че това е възможно, т.е. фиг.4.5-б има място. Ако това е така, тогава за компонентите на пълното напрежение можем да запишем:

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_n \lambda \\ p_{ny} &= \sigma_n \mu \\ p_{nz} &= \sigma_n \nu \end{aligned} \quad (4.10)$$

От друга страна за компонентите на пълното напрежение са в сила зависимостите 4.5, които заместени в 4.10, водят до системата алгебрични уравнения относно  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$ :

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_n)\lambda + \tau_{yx}\mu + \tau_{zx}\nu &= 0 \\ \tau_{xy}\lambda + (\sigma_y - \sigma_n)\mu + \tau_{zy}\nu &= 0 \\ \tau_{xz}\lambda + \tau_{yz}\mu + (\sigma_z - \sigma_n)\nu &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Известна е връзката между косинус направляващите:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 \quad (4.12)$$

Тази зависимост между косинус направляващите показва, че те никога не могат да бъдат едновременно нула. Следователно системата 4.11 не може да има нулево решение. А за да има ненулево решение, тъй като системата е хомогенна, следва да бъде изпълнено условието – детерминантата от коефициентите пред неизвестните да бъде нула, т.е.:

$$\det \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.12)$$

В уравнение 4.12 напрежението  $\sigma_n$  е неизвестно. Ако се развие детерминантата по правилото на Сарус, ще получим уравнение от трета степен относно  $\sigma_n$ :

$$\sigma_n^3 - J_1 \sigma_n^2 + J_2 \sigma_n - J_3 = 0 \quad (4.13)$$

където:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$J_3 = \det(T_\sigma) \quad (4.14)$$

Уравнение 4.13 се нарича **кубично уравнение за определяне на главните напрежения**, а коефициентите 4.14 **инварианти (неизменяеми коефициенти) на напрегнатото състояние**. Защо са инварианти и по отношение на какво, ще видим по-долу.

И така, ако уравнение 4.13 има решение, то системата 4.11 също ще има ненулево решение, т.е., ще има площадки, където тангенциалното напрежение ще бъде нула

В линейната алгебра се доказва, че при симетрична матрица от коефициентите пред неизвестните на системата 4.11 (а в случая това е точно така), съответното алгебрично уравнение 4.13 има винаги три реални корена. Следователно площадките, върху които е възможна картината от фиг.4.5-б, т.е липсват тангенциални напрежения, са три на брой. Корените на уравнение 4.13 са именно значенията на пълните (нормалните) напрежения върху тези площадки. Тези корени се наричат главни напрежения и задължително се бележат като:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  при което:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

И така, **главни площадки** са тези, върху които липсват тангенциални напрежения. **Главни напрежения** са нормалните напрежения, които действуват върху главните площадки. Както видяхме, за дадена точка от напрегнатото тяло винаги съществуват три такива площадки.

За да определим положението на главните площадки в пространството (т.е. косинус направляващите им), следва в система 4.11 да заместим последователно  $\sigma_n$  със  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ . Но тъй като за тези стойности детерминантата 4.12 става нула, което ще рече, че едното от уравненията е следствие на другите две, за да решим системата, заместваме едното от уравненията с уравнение 4.12, което има винаги място. Така за определяне на посочните косинуси на първата главна площадка, ще получим системата уравнения:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)\lambda_1 + \tau_{yx}\mu_1 + \tau_{zx}v_1 &= 0 \\ \tau_{xy}\lambda_1 + (\sigma_y - \sigma_1)\mu_1 + \tau_{zy}v_1 &= 0 \\ \lambda_1^2 + \mu_1^2 + v_1^2 &= 1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Системата 4.15 е нелинейна по отношение на неизвестните косинус направляващи, но има лесно решение. Ще пропуснем този въпрос, тъй като при решаването на конкретни практически задачи решението на 4.15, както и кубичното уравнение 4.13, за което в общия случай няма аналитично решение, днес може да се извърши със специализиран софтуер- (виж гл.18).

За определяне на втората и третата главни площадки в системата уравнения 4.15 вместо  $\sigma_1$  заместваме  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

При симетричен тензор  $T\sigma$  в линейната алгебра се доказва също, че така получените три тройки посочни косинуси определят три площадки в пространството, които са взаимно перпендикулярни, т.е:

$$\mathbf{e}_1(\lambda_1, \mu_1, v_1) \perp \mathbf{e}_2(\lambda_2, \mu_2, v_2) \perp \mathbf{e}_3(\lambda_3, \mu_3, v_3) \quad (4.16)$$

Трите оси на главните площадки се наричат още **главни оси на напрегнатото състояние** или **главни направления**. Понеже тези оси са взаимно перпендикулярни, те образуват също една правоъгълна координатна система  $123$ , която е завъртяна в пространството по отношение на изходната координатна система  $XYZ$ , но има с нея общо начало.

Ако и трите главни напрежения са различни от нула, напрегнатото състояние се нарича **тримерно** или **обемно**. Ако само две от главните напрежения са различни от нула, напрегнатото състояние се нарича **двумерно** или **равнинно** и накрая, ако само едно от главните напрежения е

различно от нула, напрегнатото състояние се нарича **едномерно** или **едноосно**.

Да предположим, че сме намерили трите главни напрежения. Тогава кубичното уравнение 4.13 може да се разложи на прости множители и да се запише във вида:

$$(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) = 0 \quad (4.17)$$

Ако развием уравнение 4.17, ние ще получим отново кубично уравнение от вида:

$$\sigma_n^3 - \bar{J}_1 \sigma_n^2 + \bar{J}_2 \sigma_n - \bar{J}_3 = 0 \quad (4.18)$$

където:

$$\begin{aligned} \bar{J}_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ \bar{J}_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \\ \bar{J}_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Тъй като уравнения 4.13 и 4.18 имат едни и същи корени, то техните коефициенти трябва да са равни, т.е.:

$$\begin{aligned} J_1 &= \bar{J}_1 \\ J_2 &= \bar{J}_2 \\ J_3 &= \bar{J}_3 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Понеже коефициентите  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  са определени в координатната система  $XYZ$ , а коефициентите  $\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3$  са определени в координатната система  $1,2,3$ , следва, че щом те са едни и същи, те не зависят от избора на координатната система или те се явяват **инвариантни** по отношение на приетата координатна система. Това следваше да се очаква, тъй като в противен случай менейки координатните системи, получаваме различни коефициенти (различен тензор 4.1), които водят до различни главни площадки и главни напрежения в дадена точка, което е невъзможно.

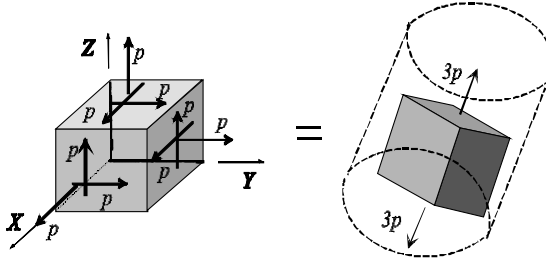
Интересен е първият инвариант от 4.14, съгласно който сумата от нормалните напрежения по страните на елементарно кубче в дадена точка остава постоянна величина.

Накрая ще отбележим, че ако принципа на суперпозицията е валиден за напреженията, формиращи тензора на напрегнатото състояние, то за главните напрежения той не е валиден, т.е. главните напрежения в

дадена точка от няколко товара не са сума от главните напрежения от отделните товари !

В гл.18 е приведена програма за определяне на главните напрежения и направления с помощта на компютър за произволен тензор на напрегнатото състояние.

**Пример 4.2.** Да се определят главните напрежения в точка, ако по стените



Фиг.4.6

на елементарния куб действуват всички напрежения, равни помежду си на едно напрежение  $p$  - фиг.4.6

От 4.14 определяме коефициентите на кубичното уравнение:

$$J_1 = 3p, \quad J_2 = 0, \quad J_3 = 0$$

Кубичното уравнение ще има вида:

$$\sigma_n^3 - 3p\sigma_n = 0 \rightarrow \sigma_n^2(\sigma_n - 3p) = 0$$

Корените на уравнението ще бъдат:

$$\sigma_1 = 3p, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

т.е. напрегнатото състояние е едномерно – чист опън. Наистина, ако от опънатия прът с напрежение в напречното сечение  $\sigma = 3p$  изрежем куб, стените на който са равнонаклонени спрямо оста му ( $\lambda = \mu = \nu = \sqrt{3}/3$ ), чрез изрази 4.5-4.9 ще получим, че по стените му ще действуват нормални и тангенциални напрежения, равни помежду си на напрежението  $p$ .

#### 4.4. Елипсоид на напреженията (Елипсоид на Ламе)

Да предположим, че сме определили главните напрежения  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$  и главните направления  $1, 2, 3$ . Да определим напреженията по произволно наклонена площадка спрямо осите  $1, 2, 3$ . За целта можем да използваме уравнения 4.5, които сега ще имат вида:

$$\begin{aligned} p_{n1} &= \sigma_1 \lambda = X \\ p_{n2} &= \sigma_2 \mu = Y \\ p_{n3} &= \sigma_3 \nu = Z \end{aligned} \tag{4.21}$$

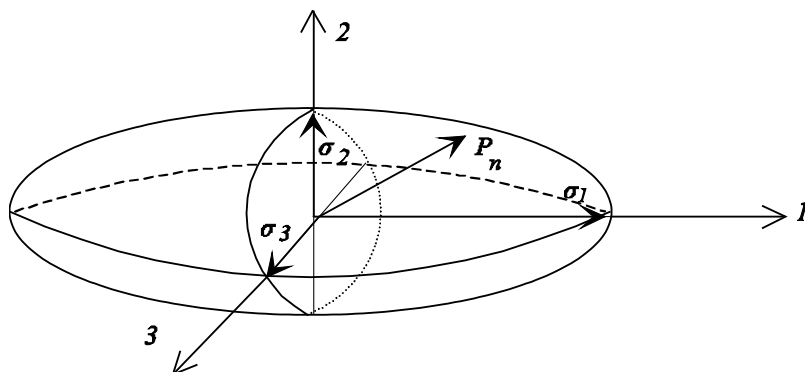
От 4.21. определяме:

$$\lambda = \frac{X}{\sigma_1} \quad \mu = \frac{Y}{\sigma_2} \quad \nu = \frac{Z}{\sigma_3}$$

Като използваме свойството на косинус направляващите 4.12, получаваме:

$$\left(\frac{X}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{Z}{\sigma_3}\right)^2 = 1 \quad (4.22)$$

Както е известно, в пространството на главните оси уравнение 4.22 представлява уравнение на елипсоид – фиг.4.7 с полуоси  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Така построеният елипсоид се нарича **елипсоид на напреженията** или **елипсоид на Ламе**.



**Фиг. 4.7. Елипсоид на напреженията**

Произволна точка от повърхнината на елипсоида дава координатите на компонентите на пълното напрежение (съгласно уравнения 4.21). Отсечката, прекарана от центъра на координатната система до тази точка дава модула на пълното напрежение. В същото време е известно, че полуосите на елипсоида притежават екстремални свойства, едната от полуосите дава най-голямото разстояние до т.О, а другата – най-малкото разстояние. Тъй като тези оси изобразяват главните напрежения, следва, че и главните напрежения притежават екстремални стойности – едното от тях е най-голямото възможно напрежение, което действа в дадената точка, а другото е най-малкото възможно напрежение, действащо в същата точка. Тъй като второто главно напрежение е винаги между първото и третото, то екстремалните стойности на напреженията се определят от модулите на първото и третото главно напрежения, т.е можем да запишем:

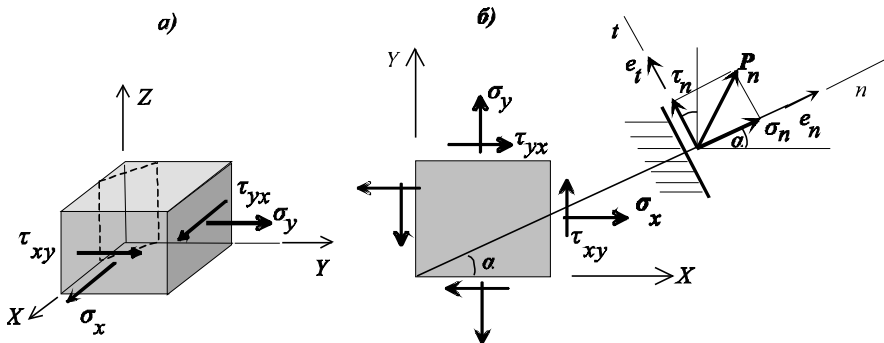
$$\min(|\sigma_1|, |\sigma_3|) \leq |p_n| \leq \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) \quad (4.23)$$

#### 4.5. Равнинно напрегнато и равнинно деформирано състояние

Равнинно напрегнато състояние имаме, когато всички напрежения действуват в една равнина – фиг. 4.8-а.

Тогава едната от главните площадки е известна ( в случая това е площадката, нормална на ос Z). Напрежението, действуващо върху нея (нула), се явява едното от главните напрежения. На основание на факта, че всички главни площадки са взаимно перпендикулярни, ясно е, че другите две главни площадки ще са измежду семейството площадки, успоредни на ос Z.

Тензорът на напрегнатото състояние за изследваното напрегнато състояние ще има вида:



Фиг. 4.8. Равнинно напрегнато състояние

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad I \quad (4.24)$$

Равнинното напрегнато състояние е много често срещано напрегнато състояние (при греди, плочи, черупки) и затова ще го изследваме подробно. Удобно е за целта напрегнатото състояние да бъде изобразено в равнината, в случая – XY – 4.8-б.

Поставяме за решение следните задачи:

1. Да се определят напреженията върху произволна площадка (успоредна на ос Z), нормалата на която сключва с ос X ъгъл  $\alpha$ .
2. Да се определят другите две главни напрежения и главни площадки.
3. Да се определят максималните тангенциални напрежения и площадките, върху които те действуват..



Тези задачи вече бяха решени за тримерния случай, така, че ще се възползуваме от получените решения.

**А) Определяне на напреженията по наклонената площадка**

На основание на изразите 4.5 определяме компонентите на пълното напрежение по наклонената площадка ( $v_n=0$ ):

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \lambda_n + \tau_{yx} \mu_n \\ p_{ny} &= \tau_{xy} \lambda_n + \sigma_y \mu_n \\ p_{nz} &= 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Нормалното напрежение получаваме на основание на 4.8 във вида:

$$\sigma_n = \sigma_x \lambda_n^2 + \sigma_y \mu_n^2 + 2\tau_{xy} \lambda_n \mu_n \quad (4.26)$$

Тангенциалното напрежение получаваме чрез скаларното произведение на пълното напрежение и единичния вектор на тангентата:

$$\begin{aligned} \tau_n &= \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{e}_t = p_{nx} \lambda_t + p_{ny} \mu_t = \\ &= \sigma_x \lambda_n \lambda_t + \sigma_y \mu_n \mu_t + \tau_{yx} \mu_n \lambda_t + \tau_{xy} \lambda_n \mu_t \end{aligned} \quad (4.27)$$

В нашия случай за косинус направляващите имаме (припомняме, че косинус направляващите  $\lambda$  и  $\mu$  са косинусите от ъглите между съответното направление и координатните оси  $X$  и  $Y$ ):

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \cos \alpha & \mu_n &= \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha \\ \lambda_t &= \cos(90 + \alpha) = -\sin \alpha & \mu_t &= \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.28)$$

След заместване на 4.28 в 4.26 и 4.27 и след елементарни преобразования, получаваме:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_n &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (4.29)$$

Уравнения 4.29 определят напреженията по произволно ориентирана площадка, успоредна на ос  $Z$ , нормалата на която сключва с ос  $X$  ъгъл  $\alpha$ .

**Б) Определяне на главните напрежения**

За целта трябва да решим кубичното уравнение 4.13. Коефициентите му ще определим съгласно 4.14. Получаваме:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \sigma_x + \sigma_y \\
 J_2 &= \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 \\
 J_3 &= \det(T_\sigma) = 0
 \end{aligned}$$

Заместваме в кубичното уравнение 4.13 и получаваме:

$$\sigma_n \left[ \sigma_n^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \sigma_n + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) \right] = 0 \quad (4.30)$$

Единият корен на това уравнение е нула (което вече показахме по-горе), а другите два се получават след решаването на квадратното уравнение в квадратните скоби. Получаваме:

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.31)$$

В процеса на търсене главните напрежения ги индексираме с римските цифри *I*, *II*, *III*, тъй като преди да сме определили всичките корени, не можем да сме сигурни кой от тях ще бъде  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  или  $\sigma_3$ .

### ***B) Определяне на главните площадки***

Както посочихме, главните площадки са онези, върху които липсват тангенциални напрежения. Като приравним на нула второто уравнение от 4.29, получаваме:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \rightarrow \alpha_I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right), \quad \alpha_2 = \alpha_I + \frac{\pi}{2} \quad (4.32)$$

Възможно е тази формула да даде разменени ъгли на главните площадки. По-точното определяне можем да получим, ако използваме уравнения 4.15. За първата главна площадка ще запишем:

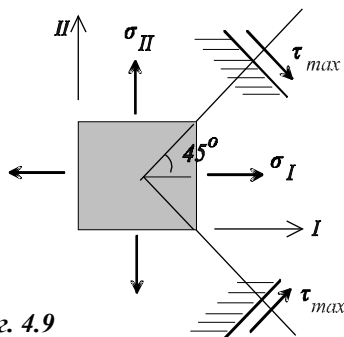
$$(\sigma_x - \sigma_I) \cos \alpha_I + \tau_{yx} \sin \alpha_I = 0$$

От тук следва:

$$\alpha_I = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sigma_I - \sigma_x}{\tau_{yx}} \right), \quad \alpha_2 = \alpha_I + \frac{\pi}{2} \quad (4.33)$$

***Г) Определяне на максималните тангенциални напрежения и площадките върху които те действуват***

Нека сме определили положението на главните площадки и големината на главните напрежения – фиг.4.9. В координатната система на главните площадки  $I, II$  тангенциалните напрежения по произволно ориентирана площадка ще определим с второто от уравнения 4.29:



Фиг. 4.9

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin 2\alpha$$

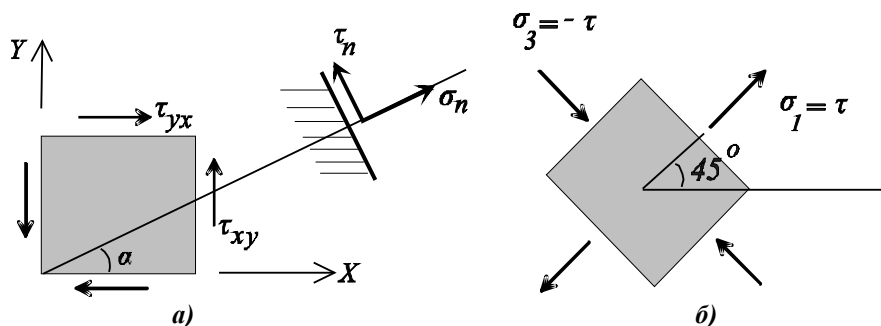
От последното уравнение се вижда, че максимално значение на тангенциалното напрежение се получава при ъгли  $\pm 45^\circ$  спрямо първото главно направление, т.е. нормалите на площадките с максимални тангенциални напрежения разполовяват правия ъгъл между главните направления. Максималната стойност на тангенциалното напрежение ще бъде:

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \quad (4.34)$$

С това поставените три задачи са решени.

#### Д) Чисто срязване – частен случай на равнинно напрегнато състояние

Чистото срязване се получава, ако по стените на кубчето действуват само тангенциални напрежения в една равнина – фиг.4.10 –а. Очевидно, чистото срязване е частен случай на равнинното напрегнато състояние. На практика възниква при чисто усукване на пръти и в нитови шевове.



Фиг. 4.10. Чисто срязване

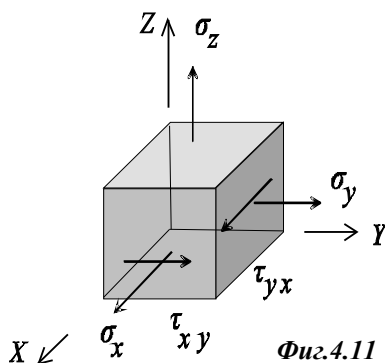
За напреженията по произволно ориентирана площадка можем да използваме уравнения 4.29, в които нормалните напрежения ще бъдат нула. Така получаваме:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_n &= \tau_{xy} \cos 2\alpha\end{aligned}\quad (4.35)$$

От тези две уравнения директно се вижда, че главните площадки се получават при ъгли  $\pm 45$  градуса спрямо ос  $X$  – тогава тангенциалното напрежение става равно на нула. Нормалните напрежения върху главните площадки при  $\alpha = \pm 45^\circ$  получаваме от същите уравнения:  $\sigma_1 = \tau_{xy}$ ,  $\sigma_3 = -\tau_{xy}$  – фиг.4.10-б. Така чистото срязване е еквивалентно на две разнозначни нормални напрежения със същата големина, действащи под ъгли  $\pm 45^\circ$  спрямо равнините на тангенциалните напрежения.

### Е) Равнинно деформирано състояние

Ще обърнем внимание, че ако по площадката с нормала ос  $Z$  – фиг. 4.8-а действуваше нормално напрежение, т.е. имаме напрегнатото състояние



Фиг.4.11

от фиг. 4.11, всички изводи, направени в този параграф, остават в сила, тъй като това напрежение ще бъде перпендикулярно на равнината  $XU$  и неговата проекция ще бъде нулева, т.е. в равнината  $XU$  остава в сила картината от фиг.4.8-б.

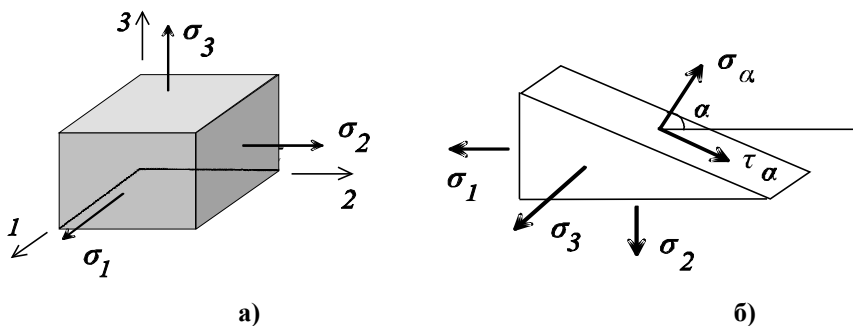
Напрегнатото състояние, показано на фиг.4.11, се нарича равнинно деформирано състояние. Такова напрегнатото състояние можем да получим, ако запъната в двата си края греда се натовари с външно

налягане по околната повърхност. Среща се по-често в геомеханиката – при тунели, иззовирни стени и др.

## 4.6. Максимални тангенциални напрежения и площадки за обемно напрегнато състояние

Да предположим, че сме определили главните напрежения за дадено напрегнато състояние и всичките са различни от нула, т.е. напрегнатото състояние е обемно – фиг.4.12-а.

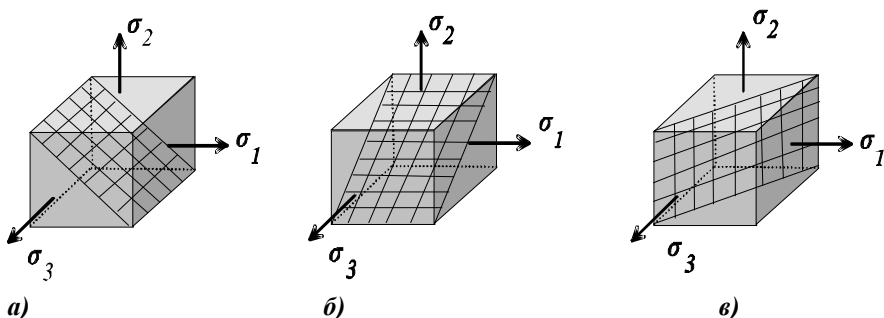
Ако разгледаме площадка, успоредна на третото главно напрежение – фиг.4.12-б, наклонена спрямо другите две главни напрежения, нормалното и тангенциалното напрежение върху нея няма да зависят от нормалното напрежение  $\sigma_z$ , понеже последното е перпендикулярно на тях и проекциите му ще са нулеви. Следователно за максималното тангенциално напрежение в равнината 1,2 ще остане в сила формула 4.34, която сега ще има вида:



Фиг. 4.12. Тримерно напрегнато състояние

$$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Това напрежение ще действа по площадка, успоредно на напрежението  $\sigma_3$  и с нормала, разполовяваща ъгъла между направленията 1 и 2 – фиг.4.13-а. От ЗВТН следва, че тангенциално напрежение със същата големина ще действа и на перпендикулярната на нея площадка, успоредна на напрежението  $\sigma_3$  (за прегледност на фигурата втората площадка не е показана на фиг.4.13-а).



Фиг. 4.13. Площадки с максимални тангенциални напрежения

По аналогия, разглеждайки другите две двойки нормални напрежения -  $\sigma_2 - \sigma_3$ ,  $\sigma_3 - \sigma_1$  ще установим, че на площадките, равнонаклонени към техните оси, в равнините 2,3 и 3,1, фиг.4.13-б, 4.13-в, ще действуват тангенциални напрежения, които се определят по аналогични изрази. Така получаваме:

$$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \tau_{13} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (4.36)$$

Като вземем предвид, че  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , следва, че най-голямото от трите тангенциални напрежения 4.36 ще бъде напрежението  $\tau_{31} = \tau_{13}$ . Или най-голямото тангенциално напрежение в околността на дадена точка ще бъде:

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (4.37)$$

От анализа на формула 4.37 може да се види, че максималното тангенциално напрежение в околността на точка не може да превиши по модул максималното нормално напрежение.

#### 4.7. Деформирано състояние в точка

Определенията за линейни и ъглови деформации бяха дадени в параграф 1.6. Подобно на напрегнатото състояние, във всяка точка на деформираното тяло съществуват три независими линейни деформации и три независими ъглови деформации, които определят деформираното състояние в околността на точката:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Тук  $XYZ$  са осите на една произволно избрана правоъгълна координатна система. Шестте деформации са функция на еластичните премествания на точката по осите на координатната система  $U, V$  и  $W$ , които от своя страна зависят от местоположението на точката. Тези зависимости ще приведем без доказателство:

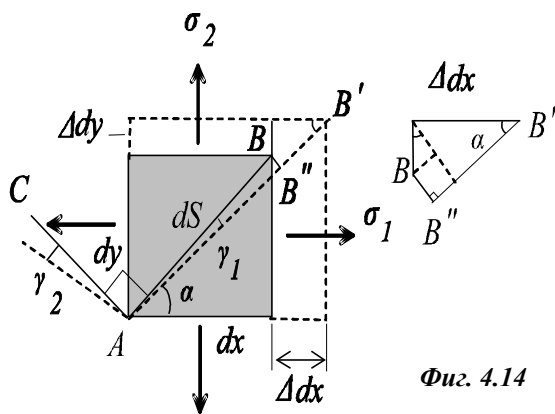
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Уравнения 4.39 са известни като **уравнения на Коши** и се използват преди всичко в Теорията на еластичността. Те представляват чисто геометрични зависимости и са валидни само при малки еластични премествания на деформируемото тяло.

### А) Аналогия между напрегнатото и деформирано състояние

Може да се покаже, че между линейните и ъгловите деформации 4.38 за изотропен материал съществуват подобни зависимости, както за напрегнатото състояние. В това ще се убедим за един частен случай на

равнинно напрегнато състояние.



Фиг. 4.14

Да разгледаме елемент с размери  $dx$  и  $dy$ , натоварен с главните напрежения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  фиг. 4.14. Целта е да определим относителното удължение на диагонала  $AB$  с дължина  $dS$  и изменението на правия ъгъл на елемента  $BAC$ .

По определение линейната деформация в направление  $AB$  ( $\alpha$  - ъгъл спрямо хоризонталата) и ъгловата деформация са равни съответно на:

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{B'B''}{AB} \quad \gamma_{\alpha} = \gamma_1 + \gamma_2 \quad (4.40)$$

От фигурата следва:

$$B'B'' = \Delta dx \cos \alpha + \Delta dy \sin \alpha \quad ds = \frac{dx}{\cos \alpha} = \frac{dy}{\sin \alpha}$$

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\Delta dx}{dx} \cos^2 \alpha + \frac{\Delta dy}{dy} \sin^2 \alpha = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha$$

$$\gamma_1 = \frac{BB''}{ds} = \frac{\Delta dx \sin \alpha - \Delta dy \cos \alpha}{ds} = \dots = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \sin 2\alpha$$

Ъгълът  $\gamma_2$  получаваме, като в  $\gamma_1$  заместим  $\alpha$  със  $\alpha + \pi/2$ . Получаваме, че отсечката  $AC$  се завъртва в обратна посока:

$$\gamma_2 = - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \sin 2\alpha$$

Пълната ъглова деформация, видно от фигурата, ще бъде отрицателна (правият ъгъл  $BAC$  става тъп) и ще е равна на сумата от абсолютните стойности на двата ъгъла, т.е.:

$$\gamma_{\alpha} = -\left[|\gamma_1| + |\gamma_2|\right] = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\alpha$$

Окончателно получаваме:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha} &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos 2\alpha \\ \frac{\gamma_{\alpha}}{2} &= -\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\alpha\end{aligned}\quad (4.41)$$

За напреженията по направление на отсечката АВ можем да използваме вече намерените изрази 4.29, извършвайки съответните замествания:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_n &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha\end{aligned}\quad (4.42)$$

От сравнението на изразите 4.41, които дават деформациите по направление АВ с изразите за напреженията 4.42 по същото направление се вижда, че те формално съвпадат, ако в 4.42 вместо нормалните напрежения се заместят линейните деформации, а вместо тангенциалните напрежения – половината от ъгловите деформации.

На това основание всички намерени изрази за напрегнатото състояние остават в сила и за деформираното състояние при указаните вече замествания.

В частност, тензорът на деформираното състояние се получава от 4.1, както следва:

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_x \end{bmatrix}\quad (4.43)$$

Особено важен е израза за деформацията в произволно направление, който ще получим от израза за нормалното напрежение в произволно направление 4.8, замествайки  $\sigma$  с  $\varepsilon$  и  $\tau$  с  $\gamma/2$ . Получаваме:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \lambda^2 + \varepsilon_y \mu^2 + \varepsilon_z \nu^2 + \gamma_{xy} \lambda \mu + \gamma_{yz} \mu \nu + \gamma_{zx} \nu \lambda\quad (4.44)$$

За равнината ХУ изразът 4.44 придобива вида:



$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \lambda^2 + \varepsilon_y \mu^2 + \gamma_{xy} \lambda \mu \quad (4.45)$$

### Б) Объемна деформация

Да изрежем кубче с елементарни размери  $dx, dy, dz$  в околността на произволна точка от тялото. След деформацията, размерите на кубчето са се променили на  $dx + \Delta dx, dy + \Delta dy, dz + \Delta dz$ . По определение **обемна деформация** в дадена точка наричаме разликата между обемите на деформираното и недеформираното кубче, отнесена към обема на недеформираното кубче, т.е.:

$$e = \frac{V' - V}{V} \quad \text{където } V = dx dy dz \quad V' = (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz) \quad (4.46)$$

Като вземем предвид, че  $\Delta dx = \varepsilon_x dx, \Delta dy = \varepsilon_y dy, \Delta dz = \varepsilon_z dz$ , получаваме:

$$e = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 \quad (4.47)$$

Докато е валиден закона на **Хук**, деформациите на телата са твърде малки величини – от порядъка на  $10^{-3}$  и по-малки. На това основание след развитието на 4.47 пренебрегваме всички членове, в които участват произведения от две и три деформации. В резултат получаваме:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (4.48)$$

т.е., обемната деформация е равна на сумата от линейните деформации в точката.

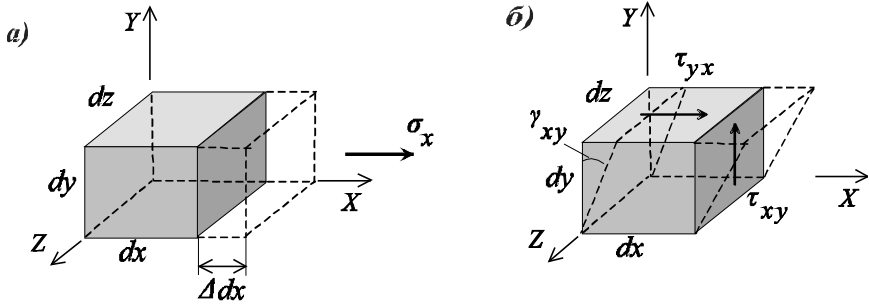
Обемната деформация не зависи от избора на координатната ситема. Това следва от свойството на първият инвариант на напрегнатото състояние 4.14, в който ако сменим нормалните напрежения с линейните деформации, ще получим формула 4.48.

### 4.8. Обобщен закон на Хук

Да разгледаме елементарно кубче, върху стените на което действуват всички напрежения – фиг.4.1. Поставяме за цел да определим деформациите на кубчето по трите оси, както и ъгловите деформации в трите координатни плоскости.

Ако върху кубчето действуваше само едно нормално напрежение (например  $\sigma_x$  - фиг.4.15-a), ще получим чист опън, при който линейните и ъглови деформации по трите оси ще бъдат:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_x}{E} \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (4.49)$$



**Фиг. 4.15. Деформации при прости натоварвания**

Тук ъгловите деформации са нула, тъй като при деформирането си кубчето се превръща в правоъгълен паралелепипед без да променя ъглите си.

Ако върху кубчето действуваше само едно тангенциално напрежение (например  $\tau_{xy}$  - фиг.4.15-б), ще получим чисто срязване, при което линейните и ъгловите деформации по трите оси ще бъдат:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (4.50)$$

Тук линейните деформации са нула, тъй като кубчето не променя линейните си размери. Другите две ъглови деформации са също нула, тъй като в тези равнини кубчето не променя ъглите си.

От 4.49 и 4.50 се вижда, че нормалните напрежения не влияят върху ъгловите деформации и обратно – тангенциалните напрежения не влияят върху линейните деформации.

#### **А) Обобщен закон на Хук**

Ако натоварим кубчето с всички напрежения и приложим принципа на суперпозицията, деформациите от отделните напрежения по отделните направления ще бъдат съгласно Табл.4.1:

Като сумираме деформациите в отделните колонки, получаваме:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)) & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)) & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)) & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Табл.4.1

$\sigma \setminus \varepsilon$	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_y$	$\varepsilon_z$	$\gamma_{xy}$	$\gamma_{yz}$	$\gamma_{zx}$
$\sigma_x$	$\sigma_x/E$	$-\mu\sigma_x/E$	$-\mu\sigma_x/E$	0	0	0
$\sigma_y$	$-\mu\sigma_y/E$	$\sigma_y/E$	$-\mu\sigma_y/E$	0	0	0
$\sigma_z$	$-\mu\sigma_z/E$	$-\mu\sigma_z/E$	$\sigma_z/E$	0	0	0
$\tau_{xy}$	0	0	0	$\tau_{xy}/G$	0	0
$\tau_{yz}$	0	0	0	0	$\tau_{yz}/G$	0
$\tau_{zx}$	0	0	0	0	0	$\tau_{zx}/G$

Формули 4.51 се наричат **обобщен закон на Хук**. Те са физически зависимости и имат място при сложно натоварване докато напреженията са под границата на пропорционалност. Принадлежат към групата основни зависимости в Теорията на еластичността и Съпротивление на материалите.

За равнинния случай в ранината  $XY$  от 4.51 остават уравненията:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (4.52)$$

Уравнения 4.52 могат да се решат относно деформациите. Тогава те придобиват вида:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (4.53)$$

### **Б) Граници на изменение на коефициента на Поасон.**

Ако в 4.48 заместим получените деформации 4.51 от обобщения закон на Хук, за обемната деформация ще получим:

$$e = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (4.54)$$

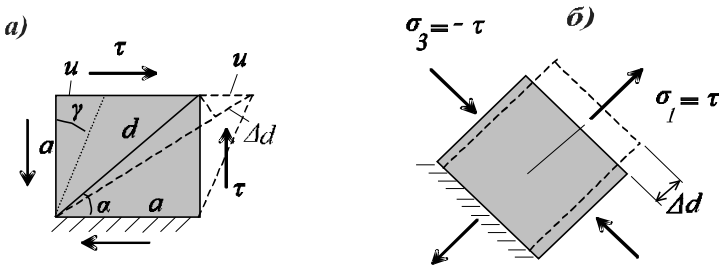
От анализа на формула 4.54 следва, че ако всички нормални напрежения са положителни, за да бъде обемната деформация положителна (предполагаме, че при всестранен опън обемът на кубчето се увеличава), е необходимо коефициентът на **Поасон** да е по малък от 0,5. Обратно, ако всички нормални напрежения са отрицателни, очаква се, че кубчето ще получи отрицателна обемна деформация, което е възможно, ако коефициентът на Поасон е отново по-малък от 0.5. И понеже коефициентът на Поасон е положително число, получаваме, че границите на изменение на коефициента на Поасон ще са:

$$0 < \mu < 0.5$$

От 4.54 също се вижда, че ако  $\mu=0.5$ , обемната деформация е равна на нула, независимо от големината на напреженията (в границите на валидност на закона на Хук). Такъв материал се нарича **несвиваем**. Близък до 0.5 е коефициентът на Поасон на чистата мед и гумата.

**В) Връзка между модулите на еластичност  $E$ ,  $G$  и коефициента на Поасон.**

Да разгледаме елементарен куб, натоварен на чисто срязване – фиг. 4.16, където е показана проекцията му в равнината. В раздел 4.6-Д видяхме, че чистото срязване е еквивалентно на две разнородни нормални напрежения със големината на тангенциалното напрежение, но действащи по равнини, наклонени под ъгъл  $\pm 45^\circ$  спрямо равнините на тангенциалните напрежения.



**Фиг. 4.16. Връзка между модулите  $E, G$  и коефициента на Поасон  $\mu$**

Ще определим удължението на диагонала на квадрата по два начина – чрез деформираното състояние, показано на фиг. 4.16-а от тангенциалните напрежения и чрез деформираното състояние от нормалните напрежения – фиг.4.16-б. За фиг.4.16-а имаме:

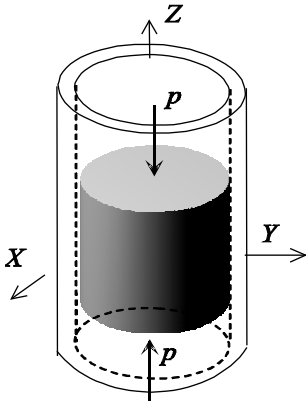
$$\Delta d \approx u \cos 45^\circ = a\gamma \cos 45^\circ = a \frac{\tau}{G} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

От фиг.4.16-б, като използваме определението за линейна деформация и обобщения закон на Хук, получаваме:

$$\Delta d = \varepsilon_1 d = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu \sigma_3) d = \frac{1}{E}(\tau + \mu \tau) d = \frac{\tau}{E}(1 + \mu) a\sqrt{2}$$

След приравняване на двата израза, получаваме:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (4.55)$$



Фиг. 4.17

(спрямо гумата). Тогава деформациите на гумения цилиндър по радиуса ще бъдат нула. На основание обобщения закон на Хук, можем да запишем.:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)) = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu (\sigma_x - p)) = 0$$

От тук определяме:

$$\sigma_x = \sigma_y = - \frac{\mu}{1 - \mu} p$$

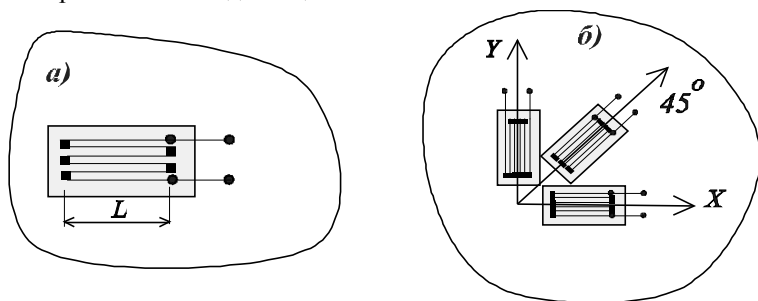
Ако положим  $\mu=0,5$  ще получим, че  $\sigma_x = \sigma_y = -p$ , т.е. всички напрежения са равни на налягането, което е вярно за течности. Или, поведението на материали с коефициент на Поасон близък до 0,5 е като на течност.

#### 4.9. Понятие за тензометриране

Много отговорни и силно натоварени детайли и конструкции след изработване обезателно се подлагат на експериментални изследвания. Ако познаваме деформациите по повърхността на даден детайл, използвайки уравнения 4.53, могат да се определят и напреженията.

Ще разгледаме накратко принципите на измерване на деформации с помощта на жичкови съпротивителни тензометри или накратко тензодатчици.

**Тензодатчикът** представлява две изолиращи подложки (от хартия, текстил, полиетилен), между които е навита зигзагообразно тънка жичка от специален материал с високо специфично омично съпротивление (константан, волфрам, полупроводник) – фиг. 4.18-а. Двата края на датчика имат изводи за свързване. Разстоянието  $L$  се нарича **база** на тензодатчика. Днес се изработват тензодатчици с база 1-30 мм.



**Фиг. 4.18. Тензодатчици за измерване на линейни деформации**

Тензодатчикът се залепва много добре (със специално лепило) върху повърхността на изследвания детайл преди същият да е натоварен. Обикновено се залепват поне два или повече датчици, свързани в подходяща схема. Ако детайлът се натовари, неговата деформация се предава и на тензодатчика. Вследствие на деформацията, жичката на тензодатчика променя дължината и напречното си сечение и неговото първоначално съпротивление се променя. Оказва се, че удължението на датчика е свързано пропорционално с изменението на неговото омично съпротивление  $\Delta R$ , т.е.:

$$\frac{\Delta R}{R} = k \frac{\Delta L}{L} = k\varepsilon \quad (4.56)$$

където  $R$  – първоначално омично съпротивление на тензодатчика,  $k$  – коефициент на пропорционалност (**коефициент на тензочувствителност**, зависещ от материала на датчика -  $k \approx 2$ ).

От 4.56 се вижда, че ако измерим изменението на омичното съпротивление  $\Delta R$ , при известно начално съпротивление  $R$  и коефициент на тензочувствителност  $k$ , можем да определим линейната деформация  $\varepsilon$  в мястото на залепване на датчика по неговото направление. Това разбира се става посредством доста сложна електронна апаратура. Ако в мястото на залепване на датчика сме сигурни, че е налице чист опън / натиск, то нормалното напрежение по направлението на датчика ще бъде  $\sigma = E\varepsilon$ .

Ако напрегнатото състояние в изследваната точка не е известно, което е по-често срещания случай, тогава трябва да се измерят двете

линейни деформации в две взаимно перпендикулярни направления  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_y$  и ъгловата деформация  $\gamma_{xy}$  в точката, което се вижда от уравнения 4.53. За съжаление ъгловата деформация не може да бъде измерена с тензодатчик. За решаване на този проблем, се използват специални **тензодатчици розетки** – фиг.4.18-б, с помощта на които се измерват линейните деформации в три различни направления:  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и под ъгъл 45 градуса -  $\epsilon_{45}$ . Като използваме уравнение 4.45, валидно за равнината, получаваме:

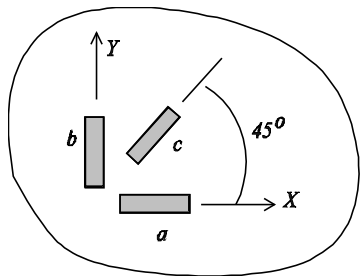
$$\epsilon_{45} = \epsilon_x \lambda^2 + \epsilon_y \mu^2 + \gamma_{xy} \lambda \mu \quad (4.57)$$

където  $\lambda$ ,  $\mu$  - косинус направляващи на наклонения датчик. При  $45^\circ$  получаваме  $\lambda = \mu = 0.707$ . От 4.57 определяме търсената ъглова деформация.

След определяне на напреженията  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  с помощта на 4.53, за които освен измерените деформации ще ни трябва модула на еластичност  $E$  и коефициента на Поасон  $\mu$  за материала на изследвания детайл, с помощта на уравнения 4.31 и 4.33 определяме главните напрежения и главните направления в областта на изследваната точка.

Основните достоинства на този метод на измерване на деформации и напрежения са: сигналът е електрически и може да се обработва и предава на разстояние; тензодатчиците са практически безинерционни и могат да се изследват и много малки детайли.

**Пример 4.4.** По повърхността на детайл с помощта на тензодатчик-розетка по три различни направления са измерени деформации  $\epsilon_a = 50 \cdot 10^{-5}$ ,  $\epsilon_b = -40 \cdot 10^{-5}$ ,  $\epsilon_c = 10 \cdot 10^{-5}$ . – фиг.4.19. Да се определят главните напрежения в областта на точката на измерване, ако за материала на детайла модулет на еластичност е  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Pa и коефициентът на Поасон е  $\mu = 0,3$ .



Фиг. 4.19

Приемаме координатна система  $XU$  така, че ос  $X$  да съвпадне с направление  $a$  ( $\epsilon_x = \epsilon_a$ ), а ос  $Y$  – с направление  $b$  ( $\epsilon_y = \epsilon_b$ ). На основание на 4.57 можем да запишем:

$$\epsilon_{45} = \epsilon_c = \epsilon_a \lambda_c^2 + \epsilon_b \mu_c^2 + \gamma_{xy} \lambda_c \mu_c$$

където  $\lambda_c = \mu_c = 0.707$ . От тук определяме ъгловата деформация:

$$\gamma_{xy} = \frac{\epsilon_c - \epsilon_a \lambda_c^2 - \epsilon_b \mu_c^2}{\lambda_c \mu_c} = \dots = 10 \cdot 10^{-5}$$

Щом познаваме деформациите, с помощта на обобщения закон на Хук (4.53), записан в обратна форма, определяме напреженията:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_a + \mu \varepsilon_b) = \dots = 87 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_b + \mu \varepsilon_a) = \dots = -57,7 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{xy} = \dots = 8,08 \text{ MPa}$$

Главните напрежения и направления ще определим с помощта на изразите за равнинно напрегнато състояние 4.31 и 4.33:

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \dots = 87,9 \text{ MPa} \quad / - 58,59 \text{ MPa}$$

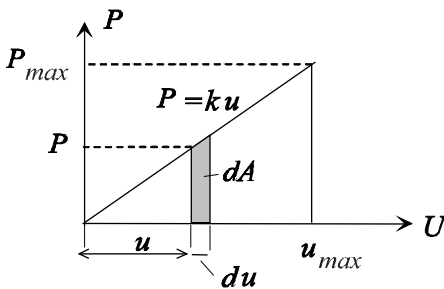
$$\alpha_I = \arctg\left(\frac{\sigma_I - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right) = \dots = 48,37^\circ, \quad \alpha_2 = \alpha_I + \frac{\pi}{2} = 138,37^\circ$$

#### 4.10. Теорема на Клапейрон. Потенциална енергия на деформацията.

В механиката на деформируемото тяло енергетичните методи са едни от най-силните методи за изследване на телата и конструкциите. Най-напред ще видим как може да се изчисли натрупаната енергията на еластичното деформирано тяло.

##### А) Теорема на Клапейрон.

От Теоретичната механика е известно, че работата, която извършва една сила с постоянна големина е равна на произведението от големината на силата и преместването на приложната и точка по направление на силата.



Фиг. 4.20

При деформирането на телата обаче силата не е постоянна – в началния стадий на деформиране зависимостта между сила и преместване е линейна. Така например зависимостта между приложената сила ( $P$ ) и преместването ( $U$ ) на приложната и точка на центрчно опънат прът получихме във вида:  $P = kU$ , където  $k$  – коравина на опън. В графичен вид това е показано на фиг.4.20.



За елементарно преместване  $du$  – фиг.4.20, силата може да се счита за постоянна и елементарната работа ще бъде  $dA = Pdu$ . Като интегрираме за целия диапазон на изменение на преместването, ще получим:

$$A = \int_0^{U_{\max}} P du = \int_0^{U_{\max}} P_{\max} \frac{u}{u_{\max}} du = \frac{1}{2} P_{\max} u_{\max} \quad (4.58)$$

Формула 4.58 изразява **теоремата на Клапейрон** за линейно деформируемо тяло, която гласи: Работата, която извършва една сила при линейното и изменение от нула до максималната си стойност е равна на половината от работата, ако действуваше през цялото време с максималната си стойност.

**Б) Потенциална енергия на деформацията на деформируемо тяло.**

Когато едно еластично тяло се деформира, то натрупва в себе си потенциална енергия, която по-късно може да отдаде обратно. Пример за това е пружината на механичния часовник. Тук ще изчислим големината на натрупаната енергия в едно тяло под действието на напреженията, създадени в него.

Ако разгледаме елементарен куб, натоварен само с нормално напрежение  $\sigma_x$  - (фиг.4.15-а), елементарната работа, която ще извърши напрежението, на основание на теоремата на Клапейрон е:

$$dA_{\sigma_x} = dU_{\sigma_x} = \frac{1}{2}(\sigma_x dydz)\Delta dx = \frac{1}{2}(\sigma_x dydz)\varepsilon_x dx = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x dV$$

Считаме, че тази работа се преобразува изцяло в потенциална енергия на деформацията ( $U$ ) на елементарното кубче. Аналогично получаваме енергиите и от другите две нормални напрежения, т.е:

$$dU_{\sigma_x} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x dV \quad dU_{\sigma_y} = \frac{1}{2}\sigma_y \varepsilon_y dV \quad dU_{\sigma_z} = \frac{1}{2}\sigma_z \varepsilon_z dV \quad (4.59)$$

Елементарната работа от тангенциалното напрежение  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , която се натрупва в потенциална енергия на деформацията, ще получим от фиг. 4.15-б:

$$dA_{\tau_{xy}} = dU_{\tau_{xy}} = \frac{1}{2}(\tau_{xy} dx dz)\gamma_{xy} dy = \frac{1}{2}\tau_{xy} \gamma_{xy} dV$$

Общо от трите тангенциални напрежения потенциалните енергии ще бъдат:

$$dU_{\tau_{xy}} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dV \quad dU_{\tau_{yz}} = \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} dV \quad dU_{\tau_{zx}} = \frac{1}{2} \tau_{zx} \gamma_{zx} dV \quad (4.60)$$

Като сумираме всички приноси към потенциалната енергия, ще получим:

$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \quad (4.61)$$

Въвеждаме понятието **специфична потенциална енергия**  $U_0$  като енергия за единица обем:

$$U_0 = \frac{dU}{dV} \quad (4.62)$$

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (4.63)$$

Ако в 4.63 заместим деформациите, определени чрез обобщения закон на Хук 4.51, ще получим:

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (4.64)$$

В координатната система на главните оси на напрегнатото състояние ще получим:

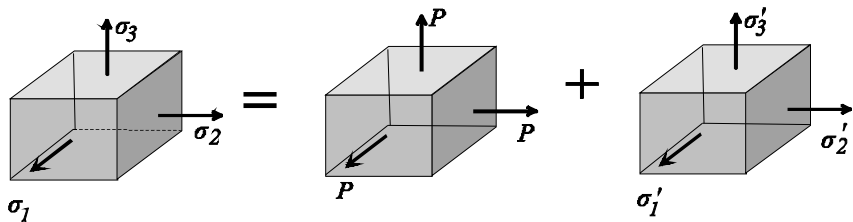
$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)) \quad (4.65)$$

Ако познаваме специфичната потенциална енергия, **пълната потенциална енергия** на тялото ще намерим чрез интегриране по обема му, т.е.:

$$U = \int_V U_0 dV \quad (4.66)$$

#### 4.11. Енергия за изменение на обема и формата на телата

При деформирането на телата се случват две неща – изменят се техния обем (ако  $\mu < 0.5$ ) и тяхната форма. Целесъобразно е потенциална енергия да се раздели също на енергия за изменение на обема и енергия за изменение на формата. Тъй като при разрушение на телата същите променят формата си, може да се очаква, че енергията за изменение на формата има съществено значение в процеса на разрушение.



Фиг. 4. 21. Енергия за изменение на обема и формата

Да предположим, че в дадена точка от напрегнатото тяло сме определили трите главни напрежения – фиг.4.21-а. Това напрегнато състояние можем да разгледаме като сума от две напрегнати състояния – фиг.4.21-б и фиг.4.21-с, при което при първото върху кубчето действуват еднакви напрежения, а върху второто – добавките до съответните напрежения, т.е.:

$$\sigma_1 = p + \sigma'_1 \quad \sigma_2 = p + \sigma'_2 \quad \sigma_3 = p + \sigma'_3 \quad (4.67)$$

Такова разлагане е възможно за всяко  $p$ . Налагаме допълнително условие обемната деформация за случай б) да е равна на нула. Съгласно 4.54 това ще е вярно, ако:

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0 \quad (4.68)$$

Сумирайки почленно 4.67 и на основание на 4.68 ще получим, че:

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (4.69)$$

Вече можем да сме сигурни, че напреженията за случай б) ще предизвикат само обемна деформация, а останалата част от напреженията – случай с), ще предизвикат само изменение на формата. Или:

$$U_a = U_{об} \quad U_b = U_{\phi}$$

Тук и по-нататък ще имаме предвид, че става дума за специфична потенциална енергия. Като използваме 4.65, енергията за изменение на обема ще получим:

$$U_{об} = \frac{1}{2E} (3p^2 - 2\mu \cdot 3p^2) = \frac{1-2\mu}{2E} 3p^2 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (4.70)$$

Енергията за изменение на формата ще получим, като от пълната специфична енергия - 4.65 извадим енергията за изменение на обема 4.70, т.е.:

$$U_{\phi} = U_0 - U_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)) - \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

След преобразуване, получаваме:

$$U_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) \quad (4.71)$$

От 4.71 следва, че ако главните напрежения са еднакви, то  $U_{\phi} = 0$ , което следваше да се очаква, тъй като еднакви по модул и знак напрежения не променят формата на куба.

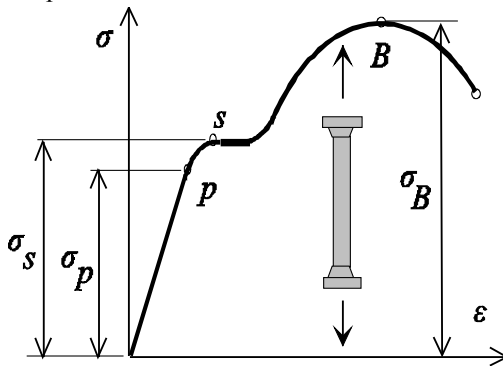
Ако използвахме пълният тензор на напрегнатото състояние, след подобни разсъждения, за енергията за изменение на формата ще получим:

$$U_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E}((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (4.72)$$

## Гл. 5. ВЪВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЯТА НА ГРАНИЧНОТО НАПРЕГНАТО СЪСТОЯНИЕ

### 5.1. Понятие за гранично напрегнато състояние. Еквивалентно напрежение.

Под **гранично напрегнато състояние** разбираме такова напрегнато състояние, при което настъпва **качествено изменение** в поведението на материала.



Фиг. 5.1

Така например при чист опън на образец от нисковъглеродна стомана от диаграмата  $\sigma - \epsilon$  (фиг.5.1) може да се види, че такива качествени изменения настъпват в точките  $P$ ,  $S$  и  $B$ . В точка  $P$  завършва линейната връзка между напрежения и деформации; в т. $S$  започва площадката на провлачване; в т. $B$  започва разрушението на образца. Съответно в тези точки за

материала на образца са характерни напреженията  $\sigma_p$  - граница на

пропорционалност,  $\sigma_s$  – граница на провлачване,  $\sigma_B$  – граница на разрушение, които бяха коментирани в гл.3. Тези напрежения са **гранични** -  $\sigma_{sp}$ .

Ако определен елемент е натоварен на чист опън и оразмеряването се извършва по допустими напрежения, уравнението за оразмеряване ще бъде:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{sp}}{n} \quad (5.1)$$

където  $[\sigma]$  – **допустимо напрежение**;  $\sigma_{sp}$  - **гранично напрежение**;  $n$  – **коэффициент на сигурност**.

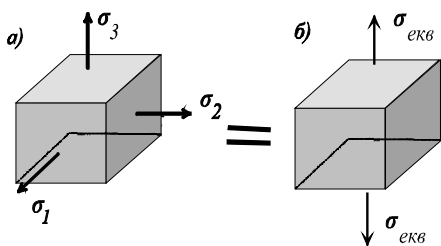
За всички жилави материали в качеството на  $\sigma_{sp}$  можем да вземем  $\sigma_s$  или  $\sigma_B$ . За крехки материали за  $\sigma_{sp}$  се взема  $\sigma_B$ .

**Коефициентът на сигурност**  $n$  зависи от вида на материала, предназначението, отговорността и срока на служба на изделието (конструкцията), степента на сигурност на изчисленията и др. За жилави материали обикновено се приема в границите 1,3-2,5, а за крехки материали – 2,5-5.

При изпълнение на 5.1 ще бъдем сигурни, че разрушение или пластични деформации няма да настъпят. Допустимите напрежения при опън и натиск за различни материали са приведени в Приложение 2.

По подобен начин може да се постъпи при оразмеряване на чист натиск или чисто срязване, тъй като за тези случаи са известни граничните напрежения за всички материали от съответните изпитания.

Ако при чистите съпротиви опън/натиск и срязване граничните напрежения са известни, то при сложно напрегнато състояние, при едновременно действие на няколко напрежения, граничното напрежение не е известно. Немислимо е да се извършва експеримент, тъй като комбинациите от възможните напрежения са безкрайни. Освен това не е възможно създаване на изпитателна машина, която да създава натоварване едновременно по трите оси на една правоъгълна координатна система.



Фиг.5.2.

За да се определи дали едно сложно напрегнато състояние е опасно, постъпваме по друг начин, като го сравняваме с друго напрегнато състояние, което е добре изучено – например чистия опън – фиг.5.2. Въвеждаме понятието **‘Еквивалентно напрежение’**.

Еквивалентното напрежение е онова напрежение, което трябва да създадем в опънатото пробно тяло (б), при което неговото напрегнато състояние стане **равноопасно** със изследваното сложно напрегнато състояние (а).

Еквивалентното напрежение реално не съществува в изследваната точка. То е числова характеристика, която е мярка за опасността от едновременното действие на всички напрежения в съответната точка на тялото.

Ако знаем еквивалентното напрежение за сложното напрегнато състояние, то неговото оразмеряване се извършва както при чистия опън:

$$\sigma_{екв, \max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{сп}}{n} \quad (5.2)$$

При това определение за еквивалентното напрежение, проблемът се състои в това, какво ще разбираме под думата ‘равноопасно’. През различни етапи от развитието на науката за Съпротивление на материалите, различните автори са имали най-различни представи за равноопасност на двете напрегнати състояния. Съобразно това днес са известни десетки хипотези за равноопасност, от които се получават съответните изрази за еквивалентното напрежение. Ще разгледаме най-известните и практически използваемите хипотези, известни още като **якостни хипотези**.

## 5.2. Основни хипотези за граничното напрегнато състояние.

### *А) Първа якостна хипотеза (хипотеза за максималните нормални напрежения)*

Тази якостна хипотеза се свързва с имената на Галилей, Ламе, Клебш и Ренкин. Съгласно тази хипотеза, две напрегнати състояния са равноопасни, ако са равни техните максимални нормални напрежения.

Като вземем предвид, че за напрегнато състояние а) максималното нормално напрежение (по модул) е  $\sigma_1$  или  $\sigma_3$ , за еквивалентното напрежение ще получим:

$$\sigma_{екв}^I = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) \quad (5.3)$$

Тази хипотеза има само историческо значение. Не се потвърждава от опита и не се използва.

### *Б) Втора якостна хипотеза (хипотеза за максималните линейни деформации)*

Тази хипотеза е предложена от Е. Мариот (18 век) и Сен Венан (19 век), според които две напрегнати състояния са равноопасни, ако са равни техните максимални линейни деформации.

Като вземем предвид, че

$$\varepsilon_{\max}^a = \max\left(\frac{1}{E}((\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3))), \frac{1}{E}((\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)))\right) \quad \varepsilon_{\max}^b = \frac{\sigma_{екв}}{E},$$

след приравняването на двете деформации, получаваме:

$$\sigma_{екв}^{II} = \max((\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)), (\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2))) \quad (5.4)$$

Тази хипотеза се потвърждава от опита за много крехки материали като камък, бетон, стъкло и др., но за метали не се използва. Като знаем крехките материали се разрушават при малки деформации и следователно може да очакваме, че местата на максимални линейни деформации се явяват опасни за якостта на материала.

### ***В) Трета якостна хипотеза (хипотеза за максималните тангенциални напрежения).***

Според тази хипотеза, предложена от Кулон през 18 век (потвърдена от опитите на Треска), две напрегнати състояния са равноопасни, ако са равни техните максимални тангенциални напрежения. За обемното напрегнато състояние а) и за чистия опън б) максималните тангенциални напрежения са съответно (виж 4.37 и 3.4):

$$\tau_{\max}^a = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \tau_{\max}^b = \frac{\sigma_{екв}}{2}$$

След приравняване на двете напрежения, получаваме:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (5.5)$$

Оказва се, че тази хипотеза се потвърждава задоволително от опита за жиливи материали със симетрични диаграми на опън и натиск. Поради простотата на формулата тя се използва широко в инженерната практика. Недостатъкът е, че не отчита второто главно напрежение. Друг недостатък е, че при всеотраслен опън (или натиск), когато всички главни напрежения са равни помежду си, формула 5.5 дава за еквивалентното напрежение стойност нула, което е все едно, че тялото не е натоварено. Това естествено не е възможно. Но този недостатък няма особено практическо значение, тъй като всеотраслен опън или натиск се срещат много рядко.

### ***Г) Четвърта якостна хипотеза (енергетична хипотеза).***

В началото са правени опити с процеса на разрушение да се свърже пълната потенциална енергия на деформация (Белтрами –19 век), но резултатът не довел до особен успех. Едва след разделянето на пълната енергия на две части – енергия за изменение на обема и енергия за изменение на формата (Хубер, Мизес, Генки - начало на 20 век), като критерий за равноопасност на две напрегнати състояния се предлага да се вземе енергията за изменение на формата (при разрушение телата променят

формата си). За случаи а) и б) енергиите на формоизменението на основание на 4.71 ще бъдат:

$$U_{\Phi}^a = \frac{1+\mu}{6E} \left( (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right) \quad U_{\Phi}^b = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_{екв}^2$$

Приравняваме двете енергии и получаваме:

$$\sigma_{екв}^{IV} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (5.6)$$

Ако за енергията на формоизменението използваме формула 4.72, по подобен начин получаваме:

$$\sigma_{екв}^{IV} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (5.7)$$

Предимствата на формула 5.6 (или 5.7) е, че отчита всички главни напрежения и затова се препоръчва за случаите, когато и трите главни напрежения са различни от нула (при жилави материали). Резултатите, получени с нея, се доближават до резултатите по трета якостна хипотеза.

### 5.3. Теория на Мор (пета якостна теория)

Получените по-горе изрази за еквивалентното напрежение се основават на някаква предварителна хипотеза и последваща проверка за нейната правилност чрез опита. Мор постъпва обратно, той получава формула за еквивалентното напрежение, базирайки се изцяло върху опита.

Преди да разгледаме теорията на Мор, ще се върнем към въпроса за изследване на напрегнатото състояние в точка, което беше извършено подробно в гл.4. Да разгледаме отново изрази 4.29, които дават напреженията по произволно ориентирана площадка в равнината XY. Ако предположим, че осите XY съвпадат с първото и третото главни направления на напрегнатото състояние ( $\tau=0$ ), тогава изрази 4.29 ще придобият вида:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_n &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ако повдигнем на квадрат двете уравнения и след това почленно сумираме, ще получим:

$$\left( \sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + (\tau_n)^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (5.9)$$





**Фиг.5.3. Окръжност на Мор**

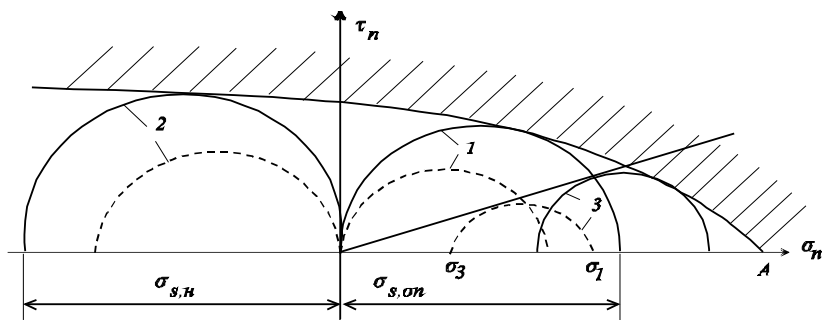
Преди ерата на компютрите окръжността на

Мор е била основно средство за изследване на напрегнатото състояние в точка. Както ще видим в гл. 18, сега това е незначителен проблем. Но за сферата на обучението окръжността на Мор не е загубила своето значение.

Задавайки различни стойности на напреженията  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , можем да получим окръжностите на Мор за чист опън ( $\sigma_1 > 0, \sigma_3 = 0$ ), чист натиск ( $\sigma_1 = 0, \sigma_3 < 0$ ), чисто усукване ( $\sigma_1 = -\sigma_3$ ) или за друго произволно равнинно напрегнато състояние.

Да се върнем към въпроса за граничното напрегнато състояние. Мор допуска, че граничното напрегнато състояние не зависи от второто главно напрежение. Следователно окръжността, построена в равнината на главните направления 1,3 ще дадат изчерпваща информация за опасността на напрегнатото състояние.

Да предположим, че разполагаме с изпитателна машина, която може да създава едновременно усилия в две взаимно перпендикулярни направления, т.е. можем да създадем напрегнато състояние с произволни значения на напреженията  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Нека материалът да е жилив с несиметрична характеристика на опън/натиск. Правим експеримент на чист опън, като увеличаваме напрежението  $\sigma_1$  докато напрегнатото състояние стане гранично ( $\sigma_1 = \sigma_{s,on}$ ). Изобразяваме това напрегнато състояние с окръжностите на Мор – фиг.5.4 ( поради симетрията, показани са само са горните половини).

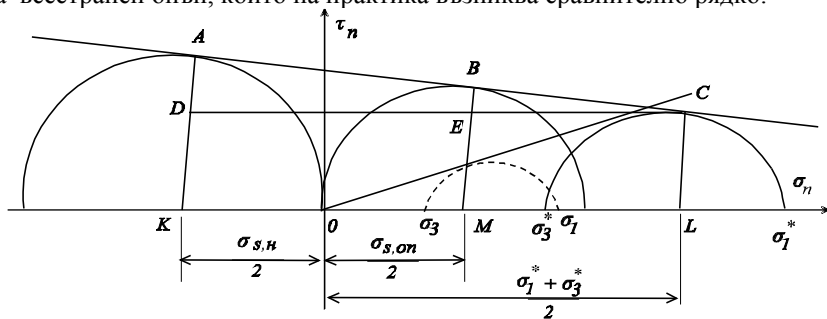


**Фиг. 5.4. Теория на Мор - гранична обвивка**

Правим експеримент на натиск, като увеличаваме натоварването докато напрегнатото състояние стане гранично ( $\sigma_1 = \sigma_{s,n}$ ) – окръжности с индекс 2. Създаваме сложно напрегнато състояние ( $\sigma_1 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ ) и пропорционално увеличаваме напреженията, докато напрегнатото състояние стане гранично – фиг. 5.4 – окръжности с индекс 3.

Прекарваме обвивка към така построените гранични окръжности. Сега със сигурност можем да твърдим, че ако имаме произволно напрегнато състояние с главни напрежения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , окръжността на Мор за което не пресича или не се допира до граничната обвивка, то това напрегнато състояние не е опасно. Така въпросът за опасността на сложното напрегнато състояние се свежда до познаването на граничната обвивка за даден материал.

Тъй като дясната част на диаграмата в областта на т.А може да бъде експериментално трудно определена (тук имаме всеотрастен опън), Мор предлага да се използва опростена гранична обвивка, представляваща права, прекарана към граничните окръжности от изпитването на опън и натиск – фиг.5.5. По този начин граничната обвивка е неточна само в случай на всеотрастен опън, който на практика възниква сравнително рядко.



**Фиг. 5.5. Опростена гранична обвивка**

Нека да имаме напрегнато състояние с главни напрежения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , - фиг.5.5. Увеличаваме пропорционално главните напрежения до стойности  $\sigma_1^*$  и  $\sigma_3^*$ , при което окръжността се допира до опростената гранична обвивка, т.е.:

$$\sigma_1^* = n\sigma_1 \quad \sigma_3^* = n\sigma_3 \quad (5.10)$$

Тук числото  $n$  може да се счита за коефициент на сигурност на напрегнатото състояние с главни напрежения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , защото показва колко далече са те от граничната им стойност  $\sigma_1^*$  и  $\sigma_3^*$ . Нека да определим този коефициент.

Прекарваме правата CD през допирната точка на малката окръжност с граничната права, успоредна на абсцисата. От подобие на триъгълниците може да се запише:

$$\frac{CE}{EB} = \frac{CD}{DA} \quad (5.11)$$

От фиг. 5.5. определяме:

$$\begin{aligned} CE &= \frac{\sigma_1^* + \sigma_3^*}{2} - \frac{\sigma_{s,on}}{2} & EB &= \frac{\sigma_{s,on}}{2} - \frac{\sigma_1^* - \sigma_3^*}{2} \\ CD &= \frac{\sigma_1^* + \sigma_3^*}{2} + \frac{\sigma_{s,n}}{2} & DA &= \frac{\sigma_{s,n}}{2} - \frac{\sigma_1^* - \sigma_3^*}{2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Заместваме 5.12 в 5.11 и след преработка, получаваме:

$$n = \frac{\sigma_{s,on}}{\sigma_1 - k\sigma_3} \quad (5.13)$$

където е положено:

$$k = \frac{\sigma_{s,on}}{\sigma_{s,n}} \quad (5.14)$$

Нека сега определим коефициента на сигурност за чистия опън (фиг.5.2-б), с който сравняваме сложното напрегнато състояние:

$$n^\sigma = \frac{\sigma_{s,on}}{\sigma_{екв}} \quad (5.15)$$

Като приравним коефициента на сигурност за сложното напрегнато състояние 5.13 с коефициента на сигурност за простото напрегнато състояние – 5.15, получаваме:

$$\sigma_{екв}^V = \sigma_1 - k\sigma_3 \quad (5.16)$$

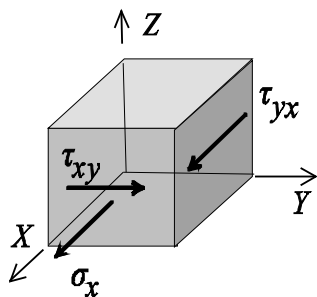
където коефициентът  $k$  се определя съгласно 5.14. За крехки материали, които нямат площадка на провлачване, коефициентът  $k$  може да се определи като:

$$k = \frac{\sigma_{B,on}}{\sigma_{B,n}} \quad (5.17)$$

Формула 5.16 е крайният резултат за еквивалентното напрежение по теорията на Мор. Тя следва да се използва за всички жилави и крехки материали с несиметрични диаграми на опън и натиск.

Ако материалът има симетрична диаграма на опън и натиск ( $k=1$ ), тогава формулата за еквивалентното напрежение по теорията на Мор 5.16 съвпада с формулата за еквивалентното напрежение по трета якостна хипотеза - 5.5. Това е едно косвено доказателство за правилността на двете формули. Очевидно е обаче, че теорията на Мор е с по-универсално приложение.

#### 5.4. Частни случаи за определяне на еквивалентното напрежение



Фиг. 5.6

При анализа на напрегнатото състояние на греди, подложени на огъване и усукване, напрегнатото състояние е главно равнинно, при което в определена точка действа едно нормално и едно тангенциално напрежение, разположени в една равнина – фиг.5.6.

Като използваме формули 4.31 за равнинно напрегнато състояние, определяме главните напрежения:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.18)$$

Второто главно напрежение очевидно е равно на нула.

На основание на формула 5.5 за еквивалентното напрежение по трета якостна хипотеза и формула 5.16 по теорията на Мор, в този случай получаваме:

$$\begin{aligned} \sigma_{екв}^{III} &= \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \sigma_{екв}^V &= \frac{1-k}{2}\sigma_x + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Еквивалентното напрежение по четвърта якостна хипотеза се получава по-лесно, ако използваме формула 5.7:

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (5.20)$$

От сравнението на първия от изразите 5.19 и 5.20 се вижда, че трета и четвърта якостни хипотези дават близки резултати

**Пример 5.1.** В точка от детайл е определено, че действуват напрежения  $\sigma_x = 200 \text{ MPa}$  и  $\tau_{xy} = 90 \text{ MPa}$ . Да се определят еквивалентните напрежения в тази точка по трета, четвърта и пета якостни теории в два случая: материалът е стомана (Ст5) и материалът е чугун, за който  $\sigma_{B,on}/\sigma_{B,n} = 0.6$ .

Еквивалентното напрежение по трета и четвърта якостни теории не зависи от вида на материала. Съгласно 5.19 и 5.20 имаме:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} = \sqrt{200^2 + 4 \cdot 90^2} = 269 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{200^2 + 3 \cdot 90^2} = 254 \text{ MPa}$$

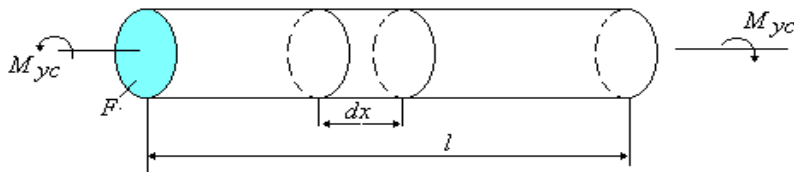
В случай на стоманен детайл коефициентът  $k=1$  и на основание на 5.19 получаваме:  $\sigma_{екв,V} = \sigma_{екв,III} = 269 \text{ MPa}$ . В случай на чугунен детайл при  $k=0,6$  получаваме:

$$\sigma_{екв}^V = 0,2 \cdot 200 + 0,8 \cdot \sqrt{200^2 + 4 \cdot 90^2} = 255 \text{ MPa}$$

## Гл. 6. ЧИСТО УСУКВАНЕ

### 6.1. Чисто усукване на пръти с кръгло напречно сечение

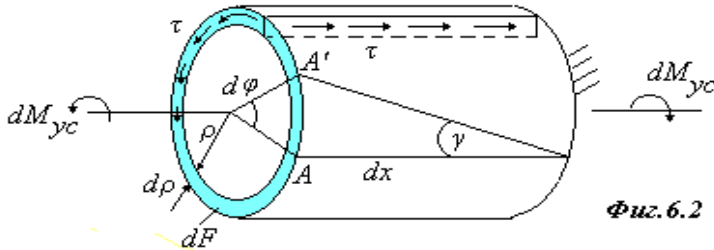
Чисто усукване имаме, когато в напречното сечение на пръта действа единствено усукващ момент – фиг.6.1. Опитът показва, че за кръгло сечение се оправдава хипотезата за равнинните сечения, т.е. всяко напречно сечение на пръта след натоварването остава равнинно. При това положение прътът може да се разгледа образно като съвкупност от кръгли монети, наредени една до друга, като при усукване всяка монета се завъртва спрямо предидущата на известен ъгъл.



Фиг. 6.1. Чисто усукване

### А) Напрягнато състояние при усукване на кръгъл прът

Да разгледаме елемент от пръта с дължина  $dx$ . От него ще изрежем пръстен с вътрешен радиус  $\rho$  и дебелина  $d\rho$  - фиг.6.2.



Фиг. 6.2

От интегралните зависимости между напреженията и вътрешните усилия 1.19 следва, че усукващият момент в напречното сечение може да бъде създаден само от тангенциални напрежения, лежащи в същото сечение. Поради симетрията на кръглото сечение можем да считаме, че тези напрежения са равномерно разпределени по обиколката на пръстена. От ЗВТН следва, че такива напрежения ще действуват и в сеченията, успоредни на оста пръстена, т.е. пръстенът се намира в условията на чисто срязване.

Определяме елементарният усукващ момент, а чрез него и целият усукващ момент в напречното сечение на вала:

$$dM_{yc} = \tau dF \cdot \rho \quad \rightarrow \quad M_{yc} = \int_F \tau \rho dF \quad (6.1)$$

Да разгледаме произволна точка  $A$  от пръстена. Ако приемем задният край на пръстена за неподвижен, при усукването т.А ще се премести в положение  $A'$ . От фиг.6.2 са в сила следните геометрични зависимости:

$$AA' = \rho d\phi = \gamma dx \quad (6.2)$$

Въвеждаме понятието **относително усукване**:

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} \quad [rad / m] \quad (6.3)$$

На основание на 6.2 и Закона на Хук при чисто срязване, следва:

$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{d\phi}{dx} = G\rho \theta \quad (6.4)$$

Заместваме 6.4. в 6.1 и получаваме:

$$M_{yc} = \int_F \tau \rho \, dF = \int_F G \theta \rho^2 \, dF = G \theta \int_F \rho^2 \, dF = G \theta I_p \quad (6.5)$$

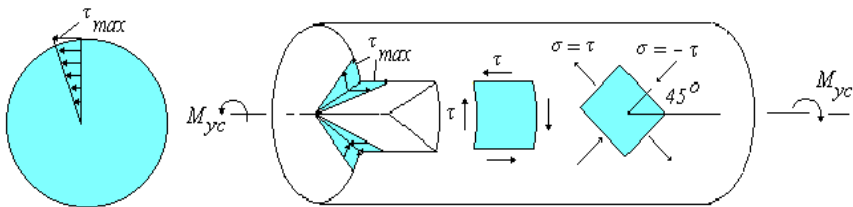
където съгласно 2.8 интегралът се нарича полярен инерционен момент ( $I_p$ ) на напречното сечение. От 6.5. следва:

$$\theta = \frac{M_{yc}}{G I_p} \quad (6.6)$$

Окончателно, заместваме 6.6. в 6.4 и получаваме следния израз за разпределението на тангенциалните напрежения:

$$\tau = \frac{M_{yc}}{I_p} \rho \quad (6.7)$$

Формула 6.7 показва, че законът на разпределение на тангенциалното напрежение е линейна функция на разстоянието на разглежданата точка до центъра на кръга – фиг.6.3.



**Фиг. 6.3. Разпределение на тангенциалното напрежение при усукване на пътен кръгъл вал**

Максималното тангенциално напрежение ще действа в напречното сечение по периферията на вала. Въвеждаме понятието **съпротивителен момент на усукване** като:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} \quad [m^3] \quad (6.8)$$

Тогава за максималното напрежение при усукване ще получим:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{yc}}{I_p} \rho_{\max} = \frac{M_{yc}}{I_p / \rho_{\max}} = \frac{M_{yc}}{W_p} \quad (6.9)$$

От фиг.6.3 виждаме, че областта около центъра на вала е слабо натоварена, а от друга страна допринася твърде малко за инерционния момент, респективно съпротивителния момент. Може да се направи извода, че рационален кръгъл профил за усукване ще бъде тръбата.

Б) Определяне на съпротивителните моменти при усукване за кръгло плътно и кухо сечение.

На основание на 6.8. и 2.19 за кръгло плътно сечение с диаметър  $D$  получаваме:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi D^4}{32 \frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16} \quad (6.10)$$

За кръгла тръба с външен диаметър  $D$  и вътрешен диаметър  $d$  ще получим:

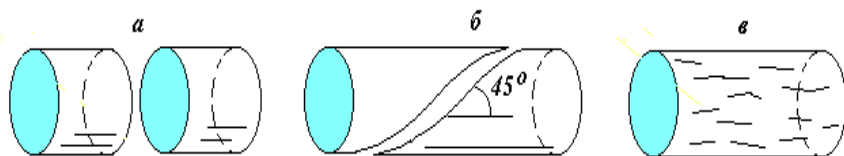
$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32 \frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16} [1 - \alpha^4] \quad \text{където} \quad \left( \alpha = \frac{d}{D} \right) \quad (6.11)$$

Отношението на съпротивителните моменти на тръба и вал с еднакви външни диаметри ще бъде  $K_1 = 1 - \alpha^4$ , докато отношението на площите им е  $K_2 = 1 - \alpha^2$ . Ако приемем  $\alpha = 0,8$ , ще получим  $K_1 = 0,59$ , а  $K_2 = 0,36$ , т.е. площта намалява много по-бързо от съпротивителните моменти, с което се доказва, че куките тръбни профили са по-рационални за усукване (ще бъдат по-леки).

### ***В) Характер на разрушение на кръглите валове при усукване***

Видяхме, че всяка точка от вала при чисто усукване се намира в условията на чисто срязване. Чистото срязване беше изследвано в раздел 4.5-Д, където видяхме, че то предизвиква опъново и натисково напрежения под ъгъл  $\pm 45^\circ$  спрямо ос  $X$ , в случая спрямо оста на вала – фиг.6.3.

Ако валът е изработен от нисковъглеродна стомана, за която знаем, че  $\tau_s < \sigma_s$ , разрушението ще настъпи в равнината с максимални тангенциални напрежения, т.е., перпендикулярно на оста на вала – фиг.6.4-а.



***Фиг. 6.4. Характер на разрушение на кръгъл вал при усукване***

Ако материалът на вала е крехък, за който знаем, че  $\sigma_{s,0n} < \tau_s$ , следва, че разрушението ще настъпи по площадки с максимални опънови напрежения, т.е. под ъгъл 45 градуса спрямо оста на вала – фиг.6.4-б.



И накрая, ако валът е изработен от дърво (например чам), известно е, че по протежение на жилите границата на разрушение е най-ниска. Следователно валът ще се нацепи по равнини, успоредни на оста му – фиг. 6.4-в.

### Г) Деформирано състояние при усукване

Поставяме за цел определяне на ъгъла на усукване на прът с кръгло сечение с известна дължина, подложен на усукване – фиг.6.1.

От 6.3 и 6.6 следва, че:

$$\left( \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{yc}}{G I_p} \right) \quad (6.12)$$

След интегриране на 6.12, получаваме:

$$\varphi = \int \frac{M_{yc}}{G I_p} dx + C \quad (6.13)$$

Ако усукващият момент и напречното сечение на пръта са постоянни, получаваме:

$$\varphi_{(x)} = \frac{M_{yc}x}{G I_p} + C \quad (6.14)$$

където  $C$ - интеграционна константа. При неподвижен ляв край  $C=0$ .

Пълното усукване на пръта ще получим от 6.14, замествайки  $x=l$ :

$$\varphi = \frac{M_{yc}l}{G I_p} \quad [rad] \quad (6.15)$$

Произведението  $G I_p$  в 6.15 се нарича **коравина на усукване**. Колкото по-голяма е коравината на усукване, толкова по-малък е ъгълът на усукване.

### Д) Диференциално уравнение на усукания прав прът

Ако диференцираме 6.12 (при  $G I_p = const$ ) и използваме 1.7, ще получим:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{M_{yc}}{G I_p} \right) = \frac{-t_{(x)}}{G I_p} \quad (6.16)$$

Полученото диференциално уравнение може да се използва както за определяне на ъгъла на усукване, така и за определяне на усукващия момент. След интегриране на 6.16, получаваме:

$$\varphi = - \iint \frac{m(x)}{GI_p} dx dx + C_1 x + C_2$$

$$M_{yc} = GI_p \frac{d\varphi}{dx} = - \int m(x) dx + GI_p C_1 \quad (6.17)$$

където  $C_1, C_2$  – интеграционни константи, които се определят от условията на закрепване и натоварване на пръта в краищата му. Ако прътът съдържа  $n$  участъка, за всеки участък ще се появят по 2 константи, така, че общият им брой ще бъде  $2n$ . Уравнения 6.16 и 6.17 ще бъдат използвани в гл.18 при численото решение на проблеми, свързани с усукването на тънкостенни пръти.

### Е) Оразмеряване на кръгли валове при усукване

Якостното оразмеряване ще получим от условието:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{yc, \max}}{W_p} \leq [\tau] \quad (6.18)$$

От тук, замествайки съпротивителния момент с 6.10 (за плътен кръгъл вал) или 6.11 за кръгла тръба, получаваме уравнение за определяне на диаметъра на пръта.

Деформационното оразмеряване се извършва чрез уравнение 6.6:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{yc, \max}}{GI_p} \leq [\theta] \quad (6.19)$$

Тук  $[\theta]$  е допустимия ъгъл на усукване, който се нормира. След заместване на инерционния момент със съответния израз 2.20, получаваме уравнение за определяне на диаметъра на пръта.

*Забележка:* За тръби е необходимо предварително приемане на някакво съотношение между малкия и големия диаметър на тръбата.

В машиностроенето под ‘вал’ разбираме елемент, който предава усукващ момент. Ако валът при това се върти, е необходимо да познаваме връзката между усукващият момент, мощността и оборотите на въртене. Тази връзка се дава с израза:

$$M_{yc} = 9,55 \frac{N}{n} [kNm] \quad (6.20)$$

където  $N$  – предавана мощност [ $kW$ ], а  $n$  – обороти на вала за минута [ $min^{-1}$ ].

### Ж) Пример 6.1. Оразмеряване на корабен вал на усукване

Между главния корабен двигател и гребния винт на всеки кораб съществува т.н. валова линия или валопровод. Да се определи диаметъра на валопровода, изпълнен от кръгло плътно сечение, ако двигателят е с мощност  $17000 kW$  с номинални обороти  $n=122 min^{-1}$ , а за материала на вала  $[\tau]=50 MPa$ . Допустимото относително усукване на вала е  $[\theta]=0,4 deg/m$ .

Най-напред ще определим усукващият момент:

$$M_{yc} = 9,55 \frac{N}{n} = 9,55 \frac{17.10^3}{120} = 1353 kNm$$

От якостното условие 6.18 и израза за съпротивителния момент на плътно кръгло сечение 6.10, получаваме:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{yc}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16.1353.10^3}{\pi .50.10^6}} = 0,516 m$$

Деформационното оразмеряване извършваме съгласно 6.19, където заместваме инерционния момент за кръгло сечение, а допустимия ъгъл на относително усукване заместваме, като го преобразуваме в  $rad/m$ - ( $0,4 deg/m = 0,4.\pi/180=6,98.10^{-3} rad/m$ ). Получаваме:

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{yc}}{\pi [\theta] G}} = \sqrt[4]{\frac{32.1353.10^3}{\pi .6,98E-3.0,8.10^{11}}} = 0,705 m$$

От получените два резултата следва да изберем  $D=0,705 m$ . Ще отбележим, че специално за корабните валопроводи съществуват редица допълнителни правила за оразмеряване.

### З) Пример 6.2. Определяне на ефективната мощност на въртящ се вал

Мощността, която се предава пряко върху работната машина на всеки агрегат наричаме **ефективна мощност**.

Върху вал с диаметър  $D=10 cm$ , въртящ се с  $n=500 min^{-1}$ , под ъгъл 45 градуса спрямо оста му, с помощта на жичков тензодатчик е била измерена линейна деформация  $\varepsilon =60.10^{-6}$ . Да се определи предаваната ефективна мощност от вала, ако за материала на вала модулът на еластичност е  $E=210 GPa$ , а коефициентът на Поасон е  $\mu=0.25$ .

На основание на обобщения закон на Хук и фиг.6.3 за деформацията в направление 45 градуса спрямо оста на вала можем да запишем:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu \sigma_3) = \frac{1}{E}(\tau + \mu \tau)$$

откъдето получаваме:

$$\tau = \frac{E\varepsilon}{1 + \mu} = \frac{210 \cdot 10^9 \cdot 60 \cdot 10^{-5}}{1,25} = 1008 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Определяме усукващия момент:

$$M_{yc} = \tau W_p = \tau \pi D^3 / 16 = 1008 \cdot 10^5 \pi \cdot 0,1^3 / 16 = 19,79 \text{ kNm}$$

От 6.20 определяме мощността:

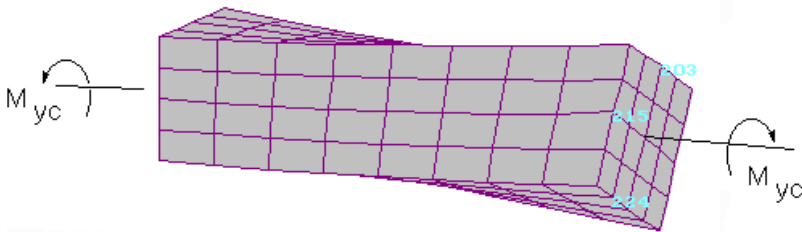
$$N = M_{yc} \cdot n / 9,55 = 19,79 \cdot 500 / 9,55 = 1036 \text{ kW}$$

Ще отбележим, че този метод се прилага в практиката при експерименталното измерване на ефективната мощност. За предаване на електрическия сигнал от въртящия се вал се използват специални токоснемачи пръстени (при по-ниски обороти) и чрез радиосигнал (при по-високи обороти).

## 6.2. Усукване на пръти с некръгло напречно сечение

### А) Особенности

Опитът показва, че при усукването на пръти със сечение, различно от кръглото, същото не остава равнинно, а се изкривява (депланира) – фиг. 6.5.

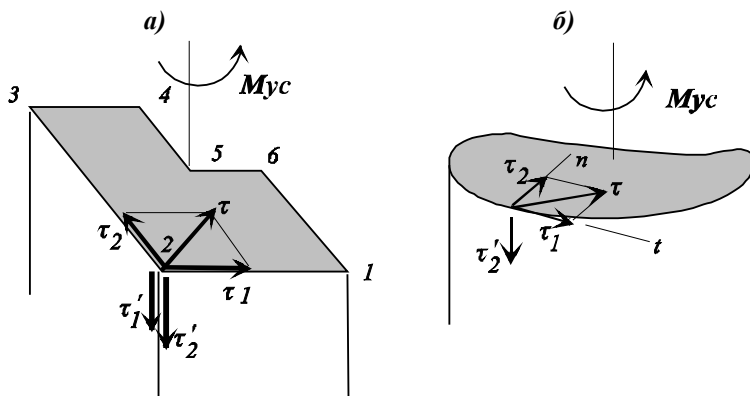


**Фиг. 6.5. Депланиция на напречните сечения при усукване на некръгли профили**

Задачата за усукване на такива пръти не може да бъде решена с методите на Съпротивление на материалите. Тук ще използваме решенията, получени в Теорията на еластичността.

Преди всичко ще обърнем внимание на две особености, които имат място при усукване на всички видове профили.

**1-ва особеност:** Тангенциалните напрежения във външните ръбови точки на профила (върховете) са винаги равни на нула – фиг.6.6-а. Външни ръбови точки на фиг.6.6 са точките 1,2,3,4 и 6, а вътрешна – т.5.



Фиг.6.6

За доказателство на това твърдение допусваме противното, т.е. че напрежението в такава точка (например т.2) е различно от нула. Това напрежение можем да разложим на компонентите  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Ако тези напрежения съществуват, от ЗВТН следва, че такива напрежения ще трябва да има и на външните повърхности, т.е.  $\tau'_1 = \tau_1$  и  $\tau'_2 = \tau_2$ . Но външните повърхности са свободни от напрежения, следователно и напреженията  $\tau_1$  и  $\tau_2$  са равни на нула, от където следва, че във външната ръбовата точка тангенциалното напрежение е нула.

**2-ра особеност.** Тангенциалните напрежения в точки, близо до контура, действуват допирателно към контура – фиг.6.6-б.

Доказателството на това твърдение ще извършим аналогично на първата особеност. Допускаме, че тангенциалното напрежение не е допирателно към контура и следователно то ще има компоненти  $\tau_1$  (допирателно към контура) и  $\tau_2$  (нормално към контура). От ЗВТН следва, че ако съществува  $\tau_2$ , ще съществува и  $\tau'_2 = \tau_2$ . Но външната повърхност е свободна от напрежения -  $\tau'_2 = 0$ , откъдето следва, че и  $\tau_2 = 0$ . Следователно  $\tau = \tau_1$ .

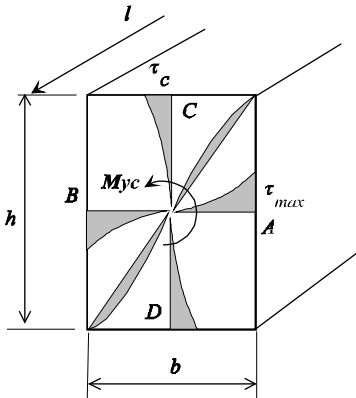
### Б) Усукване на пръти с правоъгълно напречно сечение

Както вече посочихме, тази задача е решена в Теорията на еластичността. Разпределението на тангенциалните напрежения е показано

на фиг.6.7. Максималното напрежение възниква в т.А и т.В, които са разположени по средите на високите стени на правоъгълника.

Напреженията в характерните точки на сечението и ъгълът на усукване на прът с постоянно правоъгълно сечение се определят по следните изрази.

$$\tau_{\max} = \tau_A = \frac{M_{yc}}{\alpha hb^2} \quad \tau_c = \eta \tau_A \quad \varphi = \frac{M_{yc}l}{\beta G hb^3} \quad (6.21)$$



където коефициентите  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\eta$  се определят чрез таблица във функция от отношението на височината ( $h$ ) към широчината ( $b$ ) на сечението – виж Табл. 6.1.

За отношения, непосочени в таблицата, коефициентите се определят чрез интерполация. Отношението  $h/b$  се счита за безкрайно голямо, ако  $h/b \geq 20$ .

Фиг. 6.7

Табл.6.1

h/b	1	1,5	2	2,5	3	4	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,313	0,333
$\beta$	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,313	0,333
$\eta$	1,000	0,857	0,795	0,766	0,753	0,745	0,742	0,742


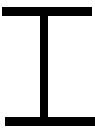
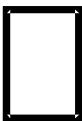






Определянето на напреженията и ъгъла на усукване на пръти с друга форма на сечението се извършва по аналогичен начин чрез таблици, получени чрез Теорията на еластичността – [8].

### 6.3. Свободно усукване на пръти с отворени тънкостенни профили

#### А) Определения

**Тънкостенни** пръти наричаме пръти, за които дебелината на стената ( $\delta$ ) е много по-малка от разгънатата дължина на сечението ( $L$ ), която от своя страна е много по-малка от дължината на пръта ( $l$ ) ( $\delta \ll L < l$ ). Пръти, за които не се изпълнява това условие се наричат **пълностенни**.

Усукването е **свободно**, ако краищата на пръта са свободни.

<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>
		
		
		

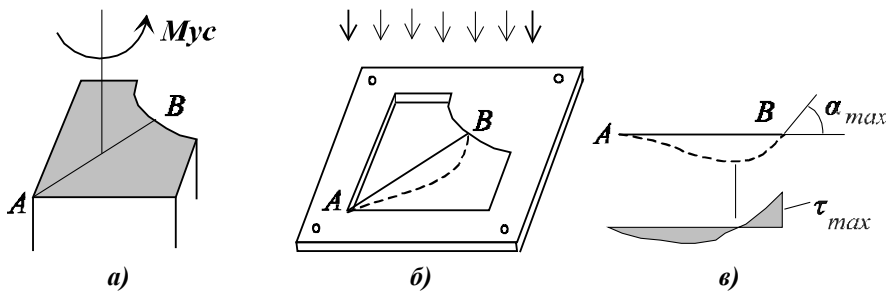
**Фиг. 6.8. Видове тънкостенни профили**

Ще различаваме три вида тънкостенни пръти: а) Тънкостенни пръти с **отворени профили**, които **се разгъват до правоъгълник** (фиг.6.8-а). б) Тънкостенни пръти с отворени профили, които **не се разгъват до правоъгълник** (фиг.6.8-б). в) Тънкостенни пръти със **затворени профили** (фиг.6.8-в). Определянето на напреженията и деформациите за трите вида профили се извършва по различен начин. Това ще разгледаме по-долу.

#### **Б) Мембранна аналогия**

Задачата за определяне на напреженията при усукване на произволен профил (фиг.6.9-а) води до решение на

диференциално уравнение в частни производни при сложна граница на областта - задача, която няма точно решение. Същевременно се оказва, че задачи от друг характер, като например задачата за определяне на провисването на тънка мембрана, опъната върху контур със същия профил и натоварена с равномерно разпределено налягане (фиг.6.9-б), се описва със същите математически зависимости. Следователно решението на втората задача може да бъде използвано и за решението на първата задача. Това за пръв път е направено от Л. Прандтл, поради което този метод на решение носи названието **“Мембранна аналогия на Прандтл”**. Той е показал, че аналог на тангенциалното напрежение в определена точка от профила е ъгълът на наклона на провисналата мембрана в тази точка, а аналог на усукващия момент е обемът, затворен между недеформираната и провисналата мембрана. В показания пример разпределението на напрежението по правата *AB* от профила ще изглежда така, както е показано на фиг.6.9-в. Максималното напрежение ще бъде в т.В, където наклона на провисналата мембрана е максимален. В недалечното минало се произвеждаха специални лабораторни прибори, работещи на този принцип, с помощта на които могат да се определят напреженията в произволен профил, подложен на чисто усукване.

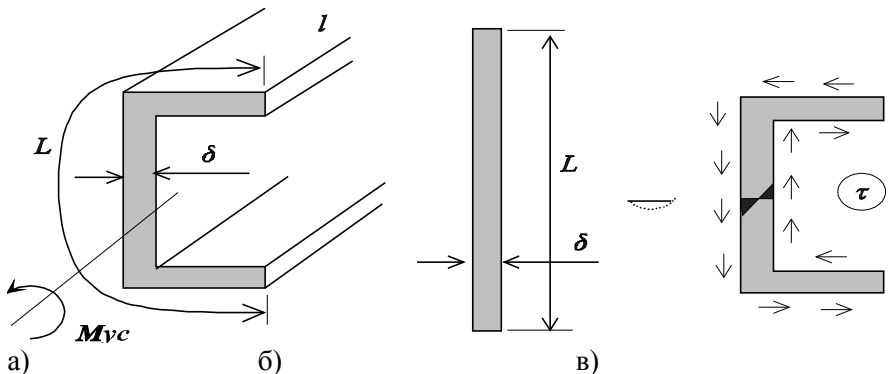


**Фиг. 6.9. Мембранна аналогия на Прандтл**

Днес тази задача може да бъде решена достатъчно точно с различни компютърни методи. Но разглежданата аналогия в никакъв случай не е анахронизъм, защото позволява качествено да определим характера на разпределение на тангенциалните напрежения за всеки профил и да изведем количествени зависимости за напреженията в тънкостенните профили.

Съществуват и други аналогии, като хидродинамична аналогия - [27].

В) Напрежения и деформации в тънкостенни пръти с отворени профили, които се разгъват до правоъгълник



**Фиг. 6.10. Напрежения в тънкостенни профили, които се разгъват до правоъгълник**

Ако използваме мембранната аналогия, за да получим картината на напреженията в профила, следва върху отворен контур с формата на профила да опънем тънка мембрана и да я натоварим с равномерно разпределено налягане. По ъгъла на наклона на мембраната можем да съдим за напреженията. Ако обаче вместо истинския профил, изрежем правоъгълен профил с широчина, равна на дебелината на тънкостенния профил и височина, равна на разгънатата дължина на профила, очевидно, особена качествена и количествена разлика в провисналата мембрана няма да има – фиг.6.10.



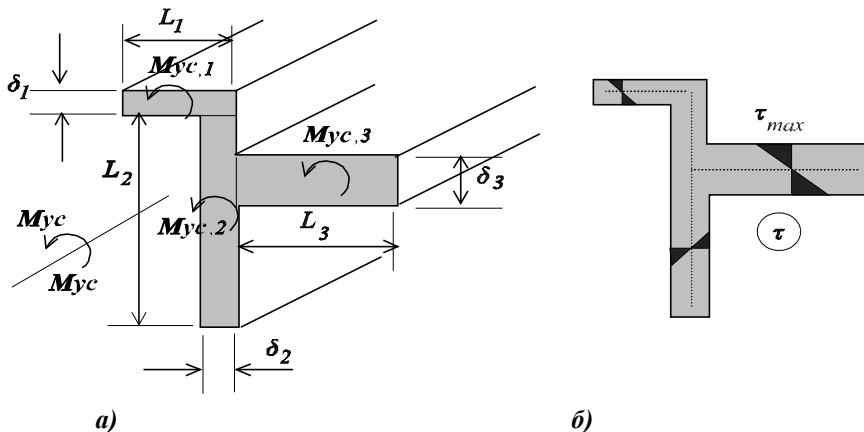
Така задачата за определяне на напреженията в тънкостенен профил, който може да се разгъне в правоъгълник, се свежда до задачата за определяне на напреженията във висок и тесен правоъгълник, за който видяхме, че съществува точно решение – изрази 6.21. За целта в тези изрази вместо  $h$  заместваме  $L$ , а вместо  $b$  заместваме  $\delta$ . От табл.6.1 за  $h/b \geq 20$  определяме  $\alpha = 0,333 = 1/3$  и  $\eta = 0,333 = 1/3$ . Получаваме:

$$\tau = \frac{3M_{yc}}{L\delta^2} \quad \varphi = \frac{3M_{yc}l}{GL\delta^3} \quad (6.22)$$

Качественото разпределение на напреженията в напречното сечение, на основание вида на провисналата мембрана, ще има вида, показан на фиг.6.10-в, т.е. по средата на стената на профила напреженията ще бъдат нула (ъгълът на наклона на мембраната там е нула), а максимални ще бъдат напреженията по краищата (ъгълът на наклона на мембраната е максимален по краищата). Поради факта, че дебелината на стената е малка, можем да считаме, че напреженията се разпределят по дебелината приблизително по линеен закон.

В) Напрежения и деформации в тънкостенни пръти с отворени профили, които не се разгъват до правоъгълник

В този случай ще разделим напречното сечение на елементарни правоъгълници, всеки от които има дължина  $L$  и дебелина  $\delta$  - фиг.6.11-а.



**Фиг. 6.11. Напрежения в тънкостенни профили, които не се разгъват до правоъгълник**

Приемаме, че всяко напречно сечение на пръта не променя формата си, т.е. всеки от правоъгълниците се завъртва на един и същ ъгъл  $\varphi$

$=\varphi$ , където  $i=1..n$  ( $n$  – общ брой на правоъгълниците). На основание на 6.22 за ъглите на завъртване можем да запишем:

$$\varphi = \varphi_i = \frac{3M_{yc,i}l}{GL_i\delta_i^3} \rightarrow M_{yc,i} = \varphi \frac{GL_i\delta_i^3}{3l} \quad (6.23)$$

Пълният усукващ момент, а от там и ъгълът на усукване ще бъдат:

$$M_{yc} = \sum_{i=1}^n M_{yc,i} = \varphi \frac{G}{3l} \sum_{i=1}^n L_i\delta_i^3 \rightarrow \varphi = \frac{3M_{yc}l}{G \sum_{i=1}^n L_i\delta_i^3} \quad (6.24)$$

Тангенциалното напрежение за  $i$ -я правоъгълник ще определим на основание на 6.22:

$$\tau_i = \frac{3M_{yc,i}}{L_i\delta_i^2} = \frac{3}{L_i\delta_i^2} \varphi \frac{GL_i\delta_i^3}{3l} = \frac{3}{L_i\delta_i^2} \frac{3M_{yc}l}{G \sum_{i=1}^n L_i\delta_i^3} \frac{GL_i\delta_i^3}{3l} = \frac{3M_{yc}\delta_i}{\sum_{i=1}^n L_i\delta_i^3} \quad (6.25)$$

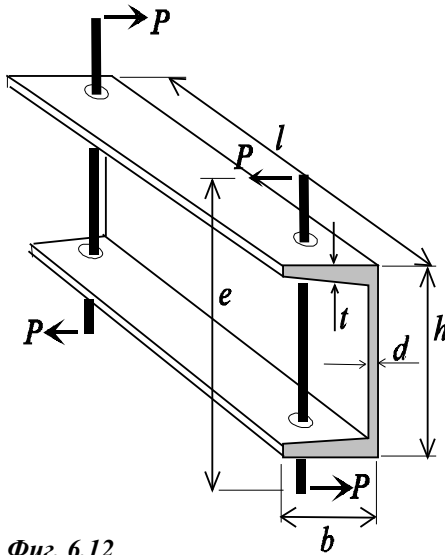
От 6.25 виждаме, че максималното тангенциално напрежение ще получим в онзи от правоъгълниците, образуващи напречното сечение, който е с най-голяма дебелина, т.е.:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_{yc}\delta_{\max}}{\sum_{i=1}^n L_i\delta_i^3} \quad (6.26)$$

Отново, на основание на мембранната аналогия, картината на напрежението ще има вида, показан на фиг.6.11-б.

С помощта на изрази 6.25 и 6.26 се изчисляват на усукване всички разклонени стандартни профили – Т-образен и двойно Т-образен. С тези изрази се изчисляват и профили, които не са разклонени, но се състоят от правоъгълници с различна дебелина – П-образен, L-образен, Z-образен и други.

**Пример 6.3.** Прът с П - образен профил N 20 (БДС6176-75) с размери  $h=200 \text{ mm}$ ,  $b=76 \text{ mm}$ ,  $d=5,2 \text{ mm}$ ,  $t=9 \text{ mm}$ ,  $l=4 \text{ m}$  е натоварен съгласно схемата от сили с големина  $P=2 \text{ kN}$  и рамо  $e=300 \text{ mm}$  - фиг.6.12. Да се определи максималното тангенциално напрежение и ъгъла на усукване на пръта. ( $G=0,8 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ ).



Фиг. 6.12

Преди всичко трябва да подчертаем, че за да се осигури свободно усукване, отворите, през които преминават двата вертикални пръта за предаване на момента, трябва да са достатъчно широки, за да се осигури депланация на напречното сечение.

Максималното тангенциално напрежение и ъгълът на усукване ще определим чрез изразите 6.26 и 6.24, валидни за тънкостенни профили, които не могат да се развият в правоъгълник. Получаваме:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_{yc} \delta_{\max}}{\sum_{i=1}^n L_i \delta_i^3} = \frac{M_{yc} \delta_{\max}}{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n L_i \delta_i^3} = \frac{M_{yc} \delta_{\max}}{J_p} = \frac{P e t}{0,333[(h-2t)d^3 + 2bt^3]} =$$

$$= \frac{2.10^3 \cdot 0,3 \cdot 0,009}{0,333[(0,2 - 0,018)0,0052^3 + 2 \cdot 0,076 \cdot 0,009^3]} = \frac{5,4}{45 \cdot 10^{-9}} = 120 \text{ MPa}$$

$$\varphi = \frac{3M_{yc} l}{G \sum_{i=1}^n L_i \delta_i^3} = \frac{M_{yc} l}{G J_p} = \frac{2.10^3 \cdot 0,3 \cdot 4}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 45 \cdot 10^{-9}} = 0,666 \text{ rad} = 38,2 \text{ deg}$$

#### 6.4. Усукване на пръти със затворени тънкостенни профили

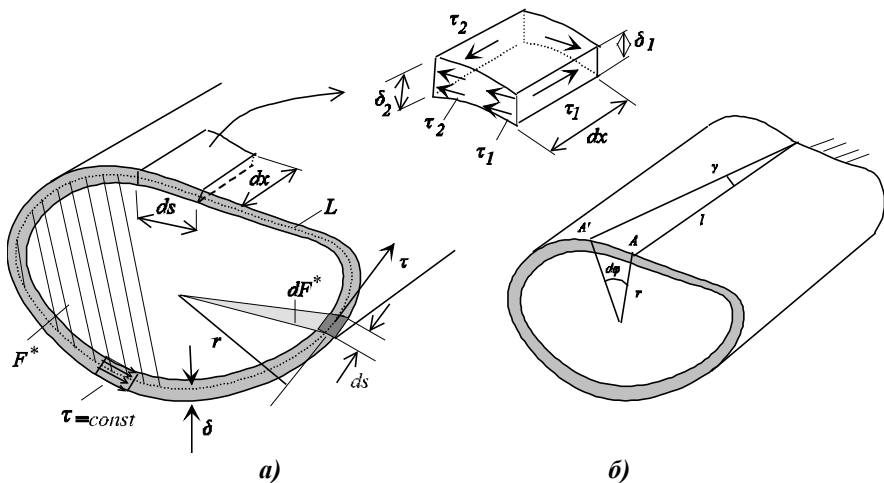
Затворените тънкостенни профили (фиг.6.8-в) се получават обикновено чрез огъване на тънка ламарина и последващо заваряване или нитоване на двата ръба.

##### А) Особенности

При усукване на такива профили възникват следните две особености – фиг.6.13:

1. Тангенциалното напрежение в напречното сечение е равномерно разпределено по дебелината на стената. Доказателството на това твърдение се проверява лесно с помощта на мембранната аналогия.

2. Ако дебелината на стената е променлива, произведението  $\tau\delta = const$  по цялата обиколка на профила.



Фиг. 6.13. Усукване на затворени тънкостенни профили

Доказателството на това се извършва като разгледаме равновесието на малък елемент, изрязан от пръта с дължина  $dx$  по оста на пръта и дължина  $ds$  по обиколката на сечението. Като напишем условието за равновесие на елемента по оста на пръта, получаваме:

$$\tau_1 ds \delta_1 - \tau_2 ds \delta_2 = 0 \rightarrow \tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2 = const \quad (6.27)$$

### Б) Определяне на напрежението

Определяме елементарния момент от напрежението, а чрез него и пълният момент, при което използваме свойството 6.27:

$$dM_{yc} = \tau ds \delta r \rightarrow M_{yc} = \int_L (\tau \delta) r ds = \tau \delta \int_L r ds = \tau \delta \int_L 2dF^* = \tau \delta 2F^*$$

Тук  $F^*$  е площта, затворена от средния контур на тънкостенния затворен профил – фиг.6.13-а. Разстоянието  $r$  е от центъра на усукване до направлението на тангенциалното напрежение.

От последния израз следва, че максималното напрежение ще получим в онази част от профила, където дебелината на стената е най-малка:

$$\tau = \frac{M_{yc}}{2F^* \delta} \rightarrow \tau_{max} = \frac{M_{yc}}{2F^* \delta_{min}} \quad (6.28)$$

### В) Определяне на ъгъла на усукване

Нека прът с дължина  $l$ , единият край на който ще считаме за неподвижен, се усуче на елементарен ъгъл  $d\varphi$  - фиг.6.13-б. Отсечката  $AA'$  може да се определи по два начина:

$$\overline{AA'} = \varphi r = \gamma l \rightarrow \varphi \frac{2dF^*}{ds} = \gamma l \rightarrow \varphi 2dF^* = \gamma l ds \rightarrow$$

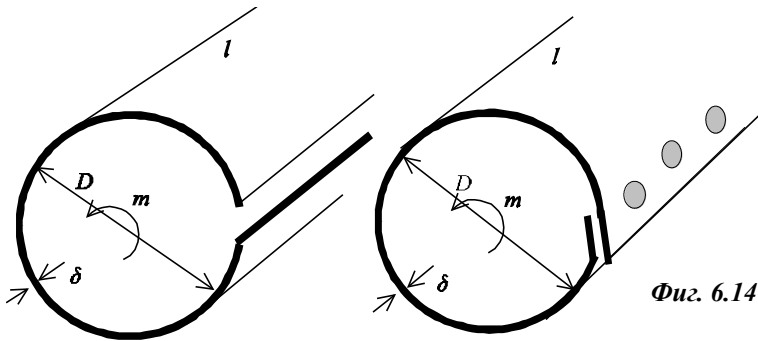
$$\int_L \varphi 2dF^* = \int_L \gamma l ds \rightarrow \varphi 2F^* = \int_L \frac{\tau}{G} l ds = \int_L \frac{M_{yc}}{2F^* \delta G} l ds = \frac{M_{yc} l}{2F^* G} \int_L \frac{ds}{\delta}$$

Окончателно получаваме:

$$\varphi = \frac{M_{yc} l}{4(F^*)^2 G} \int_L \frac{ds}{\delta} \quad (6.29)$$

При постоянна дебелина на стената ще получим:

$$\varphi = \frac{M_{yc} l L}{4(F^*)^2 G \delta} \quad (6.30)$$



**Г) Пример 6.4.** Да се сравнят напреженията и деформациите за отворена и затворена тънкостенни тръби с диаметър  $D$  и дебелина  $\delta$  - фиг. 6.14, натоварени на усукване с момент  $m$ . Да се определи диаметъра на нитовете, ако те са  $n$  на брой и с допустимо напрежение на срязване –  $[\tau]$ .

За отворената тръба ще използваме изразите 6.22. Получаваме:

$$\tau_a = \frac{3M_{yc}}{L\delta^2} = \frac{3m}{\pi D\delta^2}, \quad \varphi_a = \frac{3M_{yc}l}{GL\delta^3} = \frac{3ml}{G\pi D\delta^3}$$

За затворената тръба ще използваме изрази 6.28 и 6.30. Получаваме:

$$\tau_{\sigma} = \frac{M_{yc}}{2F^*\delta} = \frac{2m}{\pi D^2\delta}, \quad \varphi_{\sigma} = \frac{M_{yc}lL}{4(F^*)^2 G\delta} = \frac{16ml\pi D}{4\pi^2 D^4 G\delta} = \frac{4ml}{\pi D^3 G\delta}$$

Отношенията на напреженията и ъглите на усукване ще бъдат:

$$\frac{\tau_a}{\tau_{\sigma}} = 1,5 \frac{D}{\delta}, \quad \frac{\varphi_a}{\varphi_{\sigma}} = 0,75 \left( \frac{D}{\delta} \right)^2$$

При отношение  $D/\delta=50$  ще получим, че максималното тангенциално напрежение в отворения профил ще бъде 75 пъти по-голямо от напрежението в затворения профил, а ъгълът на усукване – 1875 пъти по-голям. Изводът, който се налага е, че отворените тънкостенни профили не са подходящи за усукване.

Нитовете са подложени на срязване от сила, която ще получим като умножим тангенциалното напрежение с площта на надлъжното сечение на затворената тръба - (от ЗВТН следва, че освен в напречното сечение, тангенциални напрежения със същата големина действуват и в надлъжното сечение на тръбата). Тази сила се разпределя равномерно върху всички нитове, при което приемаме, че напрежението на срязване се разпределя равномерно по площта на напречното сечение на нита. Получаваме:

$$\tau_{нит} = \frac{Q_{cp}}{nF_{нит}} = \frac{2m(l\delta)}{\pi D^2 \delta nF_{нит}} = \frac{2ml}{\pi D^2 nF_{нит}} \leq [\tau]$$

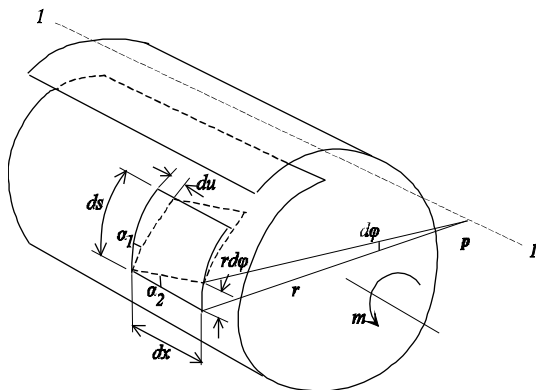
От тук може да се определи диаметъра на нитовете.

## 6.5. Стеснено усукване на отворени тънкостенни профили

### А) Деplanationия на напречното сечение

При усукване на някои профили е възможно изкривяване (**деplanationия**) на напречното сечение на пръта. Деplanationията се проявява особено силно при отворените тънкостенни профили. Достатъчно е да вземем лист хартия, свит на руло и се опитаме да го усучем. Ще забележим, че краищата на рулото се разместват както е показано на фиг. 6.15.

Квадратен елемент с размери  $ds/dx$ , изрязан от тънкостенния прът се деформира във вид на ромб по две причини – вследствие усукването и вследствие деplanationията. Ъгловата деформация на елемента ще бъде:



$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$$

От фигурата следва:

$$du = \alpha_1 ds \rightarrow \alpha_1 = \frac{du}{ds}$$

$$-r d\phi = \alpha_2 dx \rightarrow$$

$$\alpha_2 = -r \frac{d\phi}{dx} = -r\theta$$

$$\rightarrow \gamma = \frac{du}{ds} - r\theta$$

(6.31)

**Фиг. 6.15. Деplanation при усукване**

Тук знакът на ъгъла  $d\phi$  е отрицателен, защото видно от фиг.6.15, посоката му не съвпада с посоката на момента. Усукването става около ос  $1-1$ , успоредна на оста на пръта, минаваща през т.Р на напречното сечение. Тази точка, видно от фигурата, остава неподвижна при усукването и се нарича **център на усукване**.

Тангенциалното напрежение ще бъде:

$$\tau = G\gamma = G\left(\frac{du}{ds} - r\theta\right) \quad (6.32)$$

На средния контур на профила при усукване тангенциалните напрежения са нула – виж. фиг.6.10, фиг.6.11. От 6.32 следва, че на средния контур изразът в скобите се анулира:

$$\frac{du}{ds} - r\theta = 0 \rightarrow \frac{du}{ds} = r\theta \quad (6.33)$$

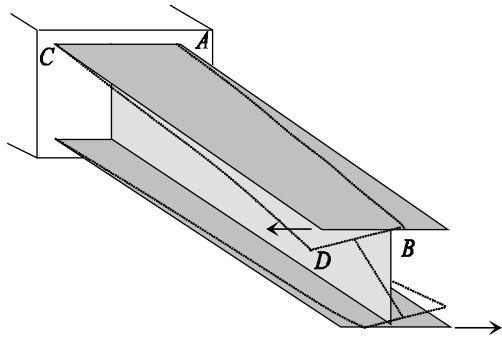
От тук определяме преместването  $u$ , което показва големината на деplanationята:

$$u = \int_s r\theta ds = \theta \int_s r ds = \theta \omega \quad (6.34)$$

Както знаем от гл.2, интегралът във формула 6.34 се нарича секторна площ. Следователно в дадено сечение от пръта деplanationята се изменя точно така, както и секторната площ  $\omega$ .

Възниква обаче известна неопределеност, тъй като секторната площ зависи от приетите полюс и начало на отчитане. Коя секторна площ участва в 6.34? Това ще видим по-долу.

### Б) Нормални напрежения при усукване вследствие деформацията



Фиг. 6.16. Стеснено усукване

Ако при усукването на отворен тънкостенен профил единият край бъде залят – фиг.6.16, този край естествено не деформира. Другият край (свободният) обаче деформира, при което някои нишки от пръта се разпъват (например нишката АВ), а други се свиват (например CD). Когато при усукването деформацията на напречните сечения е

възпрепятствувана, усукването се нарича **стеснено**.

Както се вижда от фигурата, при стеснено усукване деформацията е променлива по дължината на пръта. От тук следва, че нишките, надлъжни на оста на пръта, ще изпитат различни линейни деформации, които ще бъдат:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \omega \frac{d\theta}{dx} \quad (6.35)$$

От закона на Хук следва, че в тези нишки ще получим нормални напрежения:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\omega \frac{d\theta}{dx} \quad (6.36)$$

От 6.36 следва, че нормалните напрежения се разпределят по закона на разпределение на секторната площ. Но както и по-горе казахме, не е ясно на коя секторна площ. За да изясним този въпрос, нека изразим  $M_y$ ,  $M_z$  и  $N$  (които при чисто усукване са нули) чрез напреженията. На основание на 1.19, имаме:

$$\begin{aligned} M_y &= \int_F \sigma_x z dF = E \frac{d\theta}{dx} \int_F \omega z dF = 0 \\ M_z &= \int_F \sigma_x y dF = E \frac{d\theta}{dx} \int_F \omega y dF = 0 \\ N &= \int_F \sigma_x dF = E \frac{d\theta}{dx} \int_F \omega dF = 0 \end{aligned} \quad (6.37)$$



За да се изпълнят условия 6.37, следва, че трите интеграла следва да са равни на нула. Но както знаем от гл.2, те са едновременно нула само за главната секторна площ. От тук следва, че в получените по-горе изрази  $\omega$  е главната секторна площ. Тъй като главната секторна площ се строи с полюс центъра на огъване (виж раздел 25-Г), за който се изпълняват условията 2.45 (съвпадащи с 6.37), следва, че усукването на фиг.6.15 става около полюс, съвпадащ с центъра на огъване, който се нарича и център на усукване.

Видяхме, че при пръти разрезните усилия, които могат да предизвикат нормални напрежения, са  $N$ ,  $M_y$  и  $M_z$  – виж формули 1.19. Но сега всички тези усилия са равни на нула, а нормални напрежения въпреки това възникват. Следователно нормалните напрежения, определени по формула 6.36, във всяко напречно сечение на пръта са самоуравновесени. Ще отбележим също, че ако усукването е свободно – фиг.6.15, депланацията е равномерна по дължината на пръта и линейната деформация, определена съгласно 6.35, ще бъде равна на нула, а от там и нормалните напрежения също ще бъдат равни на нула.

На формула 6.36 може да и се даде вид, подобен на формула 6.7 за определяне на напреженията от усукване на кръгъл вал. За целта се въвежда понятието **бимомент**:

$$B = \int_F \sigma \omega \, dF \quad [Nm^2] \quad (6.38)$$

Така определен, бимоментът се нарича още **вътрешен бимомент**. Тъй като нормалните напрежения са самоуравновесени, то и бимоментът е също самоуравновесен. Той не може да се определи чрез уравненията на статиката.

Заместваме 6.36 в 6.38 и получаваме:

$$B = \int_F E\omega^2 \frac{d\theta}{dx} dF = E \frac{d\theta}{dx} \int_F \omega^2 dF = EJ_\omega \frac{d\theta}{dx} \quad (6.39)$$

От 6.39 определяме  $\theta'$  и заместваме в 6.36. Получаваме следния израз за нормалните напрежения при стеснено усукване:

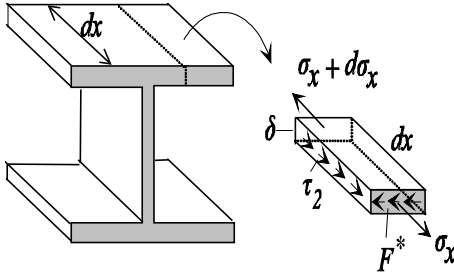
$$\sigma_\omega = \frac{B}{J_\omega} \omega \quad (6.40)$$

### **В) Вторични тангенциални напрежения при стеснено усукване**

Различната депланация на напречните сечения на пръта при стеснено усукване води до различни нормални напрежения в две близки сечения, отстоящи на разстояние  $dx$ . Ако изрежем малък елемент от пръта – фиг.6.17, за да бъде в равновесие, е необходимо по надлъжното сечение да

действуват тангенциални напрежения. Приемаме, че тези тангенциални напрежения са равномерно разпределени по дебелината на стената. От условието за равновесие на елемента по ос  $X$ , имаме:

$$\tau_2 \delta \, dx + \int_{F^*} \sigma_x \, dF - \int_{F^*} (\sigma_x + d\sigma_x) \, dF = 0 \rightarrow \tau_2 \delta = \int_{F^*} \frac{d\sigma_x}{dx} \, dF$$



Фиг.6.17

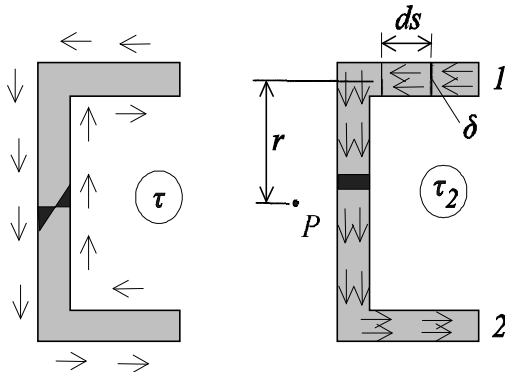
Заместваме нормалното напрежение от 6.36 и получаваме:

$$\tau_2 \delta = E \frac{d^2 \theta}{dx^2} \int_{F^*} \omega \, dF = E \frac{d^2 \theta}{dx^2} S_{\omega}^* \quad (6.41)$$

където  $S_{\omega}^*$  е секторния статичен момент на отрязаната част. Получените тангенциални напрежения наричаме **вторични**. Те се появяват само при стеснено усукване. За разлика от основните

напрежения при усукване, които се разпределят линейно по дебелината на профила, вторичните напрежения са постоянни по дебелината на профила – фиг.6.18.

Тук може да се забележи една неточност, изразяваща се в това, че при извода на формулата за депланацията 6.33 ние използвахме факта, че на средния контур на профила тангенциалното напрежение е равно на нула, което видно от фиг.6.18 не е така. Но ако се сумират двете тангенциални напрежения, ще намерим слой, където сумата им наистина ще бъде нула. Този слой ще бъде отместен от средния контур навътре или навън от средната линия на незначително разстояние.



Фиг.6.18

**Г) Диференциално уравнение на прът, подложен на стеснено усукване**

От изразите за нормалните и тангенциалните напрежения при стеснено усукване (6.36 и 6.41) виждаме, че за да бъдат определени, е необходимо познаването на относителния ъгъл на усукване -  $\theta$ . Но

поради появата на вторични тангенциални напрежения, ъгълът на усукване следва да се определи като се държи сметка и за тях.

Моментът от основните (първичните) тангенциални напрежения на пръта е:

$$M_1 = GJ_p \theta \quad (6.42)$$

Моментът от вторичните тангенциални напрежения, видно от фиг. 6.18, ще бъде:

$$M_2 = \int_F \tau_2 (\delta ds) r = \int_F \tau_2 \delta d\omega \quad (6.43)$$

Заместваме под интеграла 6.41 и интегрираме по части:

$$M_2 = E \frac{d^2\theta}{dx^2} \int_F \left( \int_{F^*} \omega dF \right) d\omega = E \frac{d^2\theta}{dx^2} \left\{ \omega \int_{F^*} dF \Big|_1^2 - \int_F \omega^2 dF \right\}$$

Значението на първият от интегралите в този израз в точките 1 и 2 е винаги нула, а смисълът на втория интеграл е секторния инерционен момент, определен за главната секторна площ. Така получаваме:

$$M_2 = - EJ_\omega \frac{d^2\theta}{dx^2} \quad (6.44)$$

На основание на 6.39, моментът  $M_2$  може да се определи чрез бимоментта:

$$M_2 = - \frac{dB}{dx} \quad (6.45)$$

Моментът  $M_2$  се нарича още **огъващо усукващ момент**, а производението  $EJ_\omega$  - **огъващо-усукваща коравина**.

Сумата от двата вътрешни момента, определени съгласно 6.42 и 6.45 трябва да е равен на приложениия усукващ момент, т.е:

$$M_1 + M_2 = M_{yc} \rightarrow GJ_p \theta - EJ_\omega \frac{d^2\theta}{dx^2} = M_{yc} \quad (6.46)$$

Полагаме:

$$\frac{GJ_p}{EJ_\omega} = \alpha^2 \quad (6.47)$$

Тогава уравнение 6.46 придобива вида:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \alpha^2\theta = -\alpha^2 \frac{M_{yc}}{GJ_p} \quad (6.48)$$

Уравнение 6.48 е диференциалното уравнение на стесеното усукване. Решението му е:

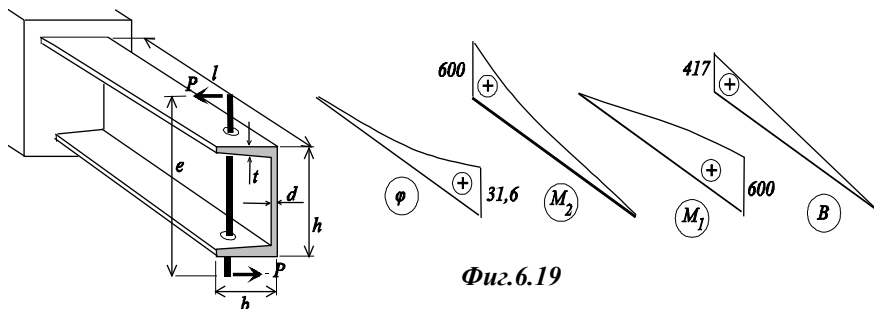
$$\theta = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x + \theta^* \quad (6.49)$$

където  $C_1$  и  $C_2$  са интеграционни константи, които определяме от условията на закрепване на пръта, а  $\theta^*$  - частно решение на диференциалното уравнение, зависещо от натоварването.

След решението му, чрез 6.42 и 6.45 определяме моментите, а чрез тях и напреженията. Нормалното напрежение определяме по 6.36, а тангенциалните напрежения по 6.26 – основното и по 6.41 – вторичното. Като използваме 6.45, формула 6.41 за вторичното тангенциално напрежение може да бъде преобразувана във вида:

$$\tau_2 = \frac{E}{\delta} \frac{d^2\theta}{dx^2} S_\omega = -\frac{E}{\delta} \frac{M_2}{EJ_\omega} S_\omega^* = -\frac{M_2 S_\omega^*}{J_\omega \delta} \quad (6.50)$$

**Д) Пример 6.4.** Прът с размери както в пример 6.3 е запънат в единия си край и се товари на усукване в другия съгласно фиг. 6.19. Да се определят нормалните и тангенциални напрежения в пръта и максималния ъгъл на усукване. Дадено:  $h=200 \text{ mm}$ ,  $b=76 \text{ mm}$ ,  $d=5,2 \text{ mm}$ ,  $t=9 \text{ mm}$ ,  $l=4$ ,  $P=2 \text{ kN}$ ,  $e=300 \text{ mm}$ . Геометричните характеристики на профила са:  $J_p=450 \cdot 10^{10} \text{ m}^4$ ,  $J_\omega=86,6 \cdot 10^{10} \text{ m}^6$  (Полярният инерционен момент е определен в пример 6.3, а секторният инерционен момент - в пример 2.2). За материала на пръта  $E=2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $G=0,8 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ .



Фиг.6.19

В случая е налице стесено усукване на пръта от усукващ момент  $m=Pe=0,6 \cdot 10^3 \text{ Nm}$ . За относителния ъгъл на усукване е в сила решението 6.49. Частното решение, удовлетворяващо диференциалното уравнение е:

$$\theta^* = \frac{m}{GJ_p}$$

Общото решение ще има вида:

$$\theta = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x + \frac{m}{GJ_p}$$

Граничните условия за определяне на константите са:

1. При  $x=0 \rightarrow \theta = 0$ . От тук определяме, че  $C_2 = -m/GJ_p$ .
2. При  $x=l$  нормалното напрежение е равно на нула. На основание на 6.36 следва, че  $\theta'(l)=0$ .

$$\theta'_{(l)} = C_1 \alpha \operatorname{ch} \alpha l + C_2 \alpha \operatorname{sh} \alpha l = 0 \rightarrow C_1 = \frac{m}{GJ_p} \operatorname{th} \alpha l$$

Така за относителния ъгъл на усукване получаваме:

$$\theta = \frac{m}{GJ_p} (1 + \operatorname{th} \alpha l \operatorname{sh} \alpha x - \operatorname{ch} \alpha x)$$

При дадените данни изчисляваме коефициента  $\alpha$ :

$$\alpha = \sqrt{\frac{GJ_p}{EJ_\omega}} = \sqrt{\frac{0,8.450}{2.86,6}} = 1,442 \rightarrow \operatorname{th} \alpha l = \operatorname{th}(1,442.4) = \operatorname{th} 5,77 = 1$$

Ъгълът на усукване на профила ще бъде:

$$\varphi = \int_0^l \theta dx = \dots = \frac{ml}{GJ_p} \left( 1 - \frac{\operatorname{th} \alpha l}{\alpha l} \right) = 0,827 \frac{ml}{GJ_p} = 0,827 \cdot 0,666 = 0,551 \text{ rad} = 31,6 \text{ deg}$$

Получихме, че при стеснено усукване максималният ъгъл на усукване намалява с 17,3 % спрямо същия ъгъл при свободно усукване. Ако дължината на пръта е по-малка, намалението е доста по-осезателно.

Първата и втората производна на  $\theta$  са:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{m}{GJ_p} \alpha (\operatorname{th} \alpha l \operatorname{ch} \alpha x - \operatorname{sh} \alpha x)$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{m}{GJ_p} \alpha^2 (\operatorname{th} \alpha l \operatorname{sh} \alpha x - \operatorname{ch} \alpha x)$$

От тук определяме разрезните усилия:

$$M_2 = - EJ_0 \frac{d^2\theta}{dx^2} = \dots = - m(\text{th}\alpha \text{ l sh}\alpha x - \text{ch}\alpha x) = - 0,6 \cdot 10^3 (\text{sh} 1,44x - \text{ch} 1,44x)$$

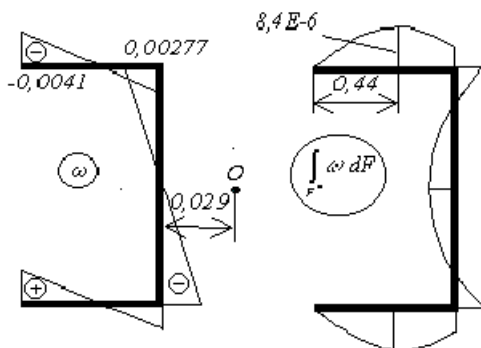
$$B = EJ_0 \frac{d\theta}{dx} = \frac{m}{\alpha} (\text{th}\alpha \text{ l ch}\alpha x - \text{sh}\alpha x) = 0,417 \cdot 10^3 (\text{ch} 1,44x - \text{sh} 1,44x)$$

Диаграмите на изменението на моментите  $M_1$ ,  $M_2$  и бимоента  $B$  по дължината на пръта са показани на фиг.6.19.

Всяко от вътрешните усилия предизвиква съответните напрежения.

Нормалните напрежения от бимоента ще бъдат най-големи в запъването и ще се разпределят по закона на главната секторна площ – фиг. 6.20. Максималното нормално напрежение ще действа в края на поясите:

$$\sigma_{\max} = \frac{B}{J_0} \omega_{\max} = \frac{417}{86,6 \cdot 10^{-10}} (\pm 0,00424) = \pm 204 \text{ MPa}$$



Фиг.6.20

Знакът на нормалното напрежение в определена точка съответства на знака на главната секторна площ.

Максималното тангенциално напрежение от усукващият момент  $M_1$  ще бъде най-голямо в края на пръта по периферията на поясите на профила и ще се определи както при свободно усукване:

$$\tau_{1,\max} = \frac{M_1}{J_p} \delta_{\max} = \frac{600}{450 \cdot 10^{-10}} 0,009 = 120 \text{ MPa}$$

Максималното вторично тангенциално напрежение от момента  $M_2$  ще бъде максимално в запъването и ще определим съгласно формула 6.50. Преди това е нужно да се определи разпределението на статичния момент  $S_\omega^*$  – фиг.6.20. Максималната стойност на този момент се получава винаги в точката от профила, където главната секторна площ се анулира. Законът на разпределение на статичния момент показва как е разпределено вторичното тангенциално напрежение.

$$S_{\omega}^* = \int_{F^*} \omega dF = \delta \int_0^{0,44} \omega ds = -0,009 \frac{0,0041 \cdot 0,44}{2} = -8,4 \cdot 10^{-6}$$

$$\tau_{2,\max} = - \frac{M_2 S_{\omega,\max}^*}{J_{\omega} d} = \frac{600 \cdot 8,4 \cdot 10^{-6}}{86,6 \cdot 10^{-10} \cdot 0,009} = 64,7 \text{ MPa}$$

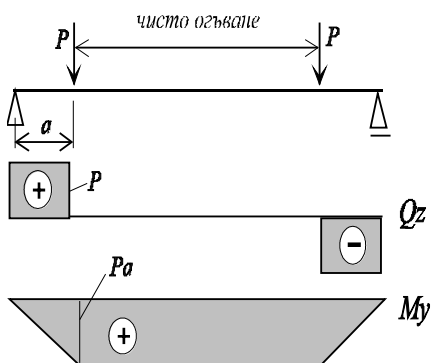
Вторичното тангенциално напрежение като правило е винаги по-малко спрямо напрежението от момента  $M_1$ .

Както се вижда, при стесненото усукване картината на напреженията е далече по-различна от тази при свободното усукване. Тук възникват значителни нормални напрежения, каквито при свободното усукване липсват. Същевременно коравината на пръта при усукване се увеличава.

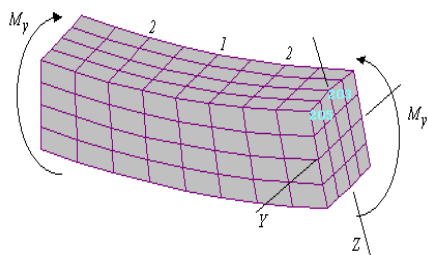
## Гл.7. СПЕЦИАЛНО ОГЪВАНЕ

### 7.1. Напрежения при чисто специално огъване

Огъването се нарича **чисто**, ако в напречното сечение действа само огъващ момент. На фиг. 7.1. е показан пример, където в участъка



Фиг.7.1. Чисто огъване



Фиг. 7.2. Чисто специално огъване

между двете сили всички разрезни усилия, освен огъващият момент, са равни на нула. Следователно този участък е натоварен на чисто огъване. Към схемата от фиг.7.1 се привежда натоварването на вагонните и автомобилни оси.

Огъването е **специално**, ако огъващият момент действа около едната от главните оси на инерция - фиг.7.2, където е показана гредата с квадратно сечение, натоварена с огъващ момент  $M_y$ .

Опитът показва, че при чисто огъване всяко напречно сечение на гредата остава равнинно, т.е. валидна е хипотезата на **Бернули**. Това може и да се докаже и от условието за симетрия – фиг.7.2. Поради симетрия на натоварването няма никакво основание средното сечение '1' да депланира. Но за всяка от половинките може да се каже

същото – сечения ‘2’ също остават равнинни. Така разделяйки всеки елемент на две части, можем да докажем, че всяко сечение наистина остава равнинно.

Да разгледаме елемент от гредата с дължина  $dx$  – фиг.7.3, подложена на чисто специално огъване. Част от гредата, видно от фигурата, се свива, а друга част се разпъва. Между тези части има пласт, който нито се разпъва, нито се свива – пластът  $AB$ , който ще наречем **неутрален**. Праволинейната първоначално ос на гредата се огъва с радиус на кривина  $\rho$ . Произволна нишка  $CD$ , отстояща на разстояние  $z$  от неутралния пласт, се разпъва на величината  $DD'$ . Линейната деформация на тази нишка ще бъде:

$$\varepsilon_x = \frac{DD'}{CD} = \frac{DD'}{AB} = \frac{z d\theta}{\rho} = \frac{z}{\rho} d\theta \quad (7.1)$$

Напрежението в нишката, на основание закона на Хук, ще бъде:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{z}{\rho} d\theta \quad (7.2)$$

Тъй като положението на неутралния пласт засега не е известно, в тази формула не знаем нито  $z$ , нито  $\rho$ . За да уточним това, като използваме интегралните връзки между нормалното напрежение и разрезните усилия 1.19, можем да запишем:

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma_x dF = \frac{E}{\rho} \int_F z dF = \frac{E}{\rho} S_y = 0 \\ M_z &= \int_F \sigma_x y dF = \frac{E}{\rho} \int_F y z dF = \frac{E}{\rho} J_{yz} = 0 \\ M_y &= \int_F \sigma_x z dF = \frac{E}{\rho} \int_F z^2 dF = \frac{E}{\rho} J_y \neq 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Тук интегрирането се извършва по цялото напречно сечение на гредата  $F$ . За да бъдат нормалната сила  $N$  и огъващият момент  $M_z$  нула (дадено по условие), видно от първите две уравнения на 7.3, е нужно статичният момент  $S_y$  и центробежният момент  $J_{yz}$  също да са нула. Това, както знаем от гл.2, е вярно, ако осите  $YZ$  са главни оси на инерция на напречното сечение на гредата. С това определихме положението на

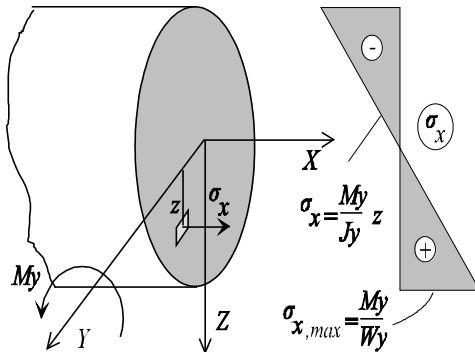


неутралния пласт – той минава през центъра на тежестта и съвпада с главната ос  $Y$ .

От третото уравнение на 7.3 определяме кривината на гредата:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EJ_y} \quad (7.4)$$

Заместваме 7.4 в 7.2 и получаваме:



Фиг. 7.4

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z \quad (7.5)$$

Формула 7.5 дава разпределението на нормалните напрежения в напречното сечение на гредата при чисто специално огъване. (Получена е от **Навие** през 1826). Това разпределение, независимо от формата на напречното сечение, зависи линейно от  $Z$ , като всички точки от напречното

сечение с еднаква апликата  $Z$  ще имат едно и също нормално напрежение – фиг.7.4. Главната ос на инерция  $Y$  се явява неутрална – всички точки, лежащи върху нея, не изпитват напрежения. От двете страни на неутралната ос нормалните напрежения имат различен знак. Ако огъващият момент е положителен, долния слой на гредата се товари на опън.

Максималното нормално напрежение ще възникне в онази точка от напречното сечение, която е най-отдалечена от неутралната линия, в случая от ос  $Z$ .

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_y}{J_y} z_{\max} \quad (7.6)$$

Въвеждаме понятието съпротивителен момент на огъване около ос  $Y$ :

$$W_y = \frac{J_y}{z_{\max}} \quad [m^3] \quad (7.7)$$

Тогава максималното нормално напрежение съгласно 7.6 може да се запише още така:

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_y}{W_y} \quad (7.8)$$

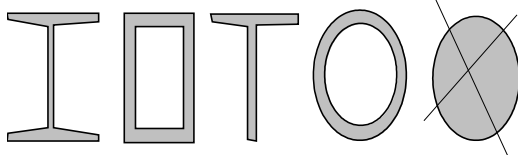
Аналогично може да се определи съпротивителният момент около ос  $Z$ . Както се вижда от 7.7, съпротивителните моменти зависят единствено от формата на напречното сечение. За всички стандартни профили той се привежда в съответните таблици.

За най-често срещаните сечения като правоъгълното (с размери  $b/h$ ) и кръглото (с диаметър  $d$ ), съпротивителните моменти на огъване ще бъдат:

$$W_y = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{bh^3}{12 \cdot h/2} = \frac{bh^2}{6} \quad W_z = \frac{hb^2}{6} \quad (7.9)$$

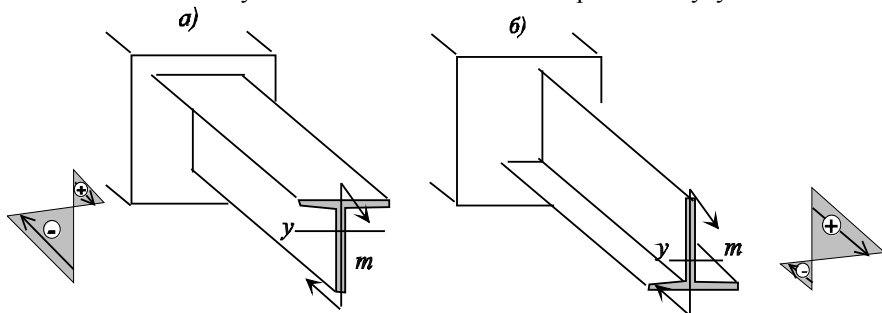
$$W_y = W_z = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{\pi d^4}{64 \cdot d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \quad (7.10)$$

От вида на диаграмата на нормалните напрежения на фиг.7.3 можем да установим, че около неутралната ос (ос  $Y$ ) напречното сечение на



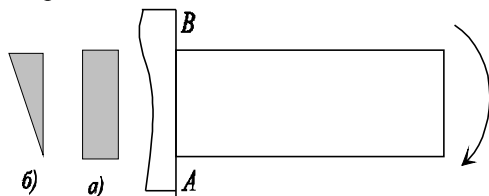
гредата е слабо натоварено. Следователно тази част от гредата може да бъде “изхвърлена”. Така стигаме до заключението, че рационални профили за огъване ще бъдат тези, в които материалът е

разположен далече от неутралната ос. Такива са двойно Т-образния профил, кухият правоъгълен или тръбен профил, Т-образният профил и др. – фиг. 7.5. Абсолютно неподходящ ще бъде обаче плътният кръгъл профил, за който там, където напреженията са минимални, профилът е най-широк. Това не значи, че греди с кръгло сечение не се използват изобщо на огъване. В такива случаи те са обикновено натоварени и на усукване.



Фиг. 7.6

Фактът, че нормалните напрежения в напречното сечение са с различни знаци от двете страни на неутралната линия, следва да се отчита за греди с несиметрични профили, изработени от крехки материали (например чугун), за които знаем, че на опън се съпротивляват доста по-зле, отколкото на натиск. По тази причина, чугунена конзола, изработена от Т-образен профил – фиг.7.6, ще има по-голяма товароносимост за случай а), отколкото за случай б). При едно и също натоварване в случай б) опънните напрежения са почти два пъти по-големи от колкото в случай а).



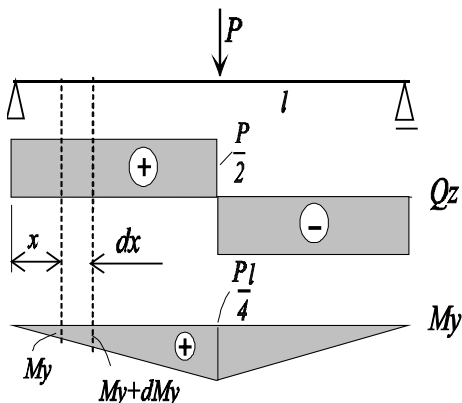
Интересно е историческото развитие на проблема за огъването на гредата и формула 7.6. Може да се каже, че с решаването на този проблем започва развитието на Съпротивление на материалите

като наука. Така например Г.

**Галилей** е считал (1638), че при огъване на конзолно закрепена гредата цялото сечение е натоварено равномерно, като при огъване гредата се завъртва около т.А – фиг.7.7-а. По-късно **Я. Бернули** (1705) допуска разпределение на напрежението по триъгълников закон фиг.7.7-б), което е значително по-добро приближение. Вярното решение (фиг.7.4) дава **Навие** едва през 1826 г.

## 7.2. Напречно специално огъване

Огъването се нарича **напречно**, ако в напречното сечение на гредата освен огъващ момент  $M_y$  действа и напречна сила  $Q_z$  – фиг.7.8. То е много по-често срещано, отколкото чистото огъване.



### А) Особенности

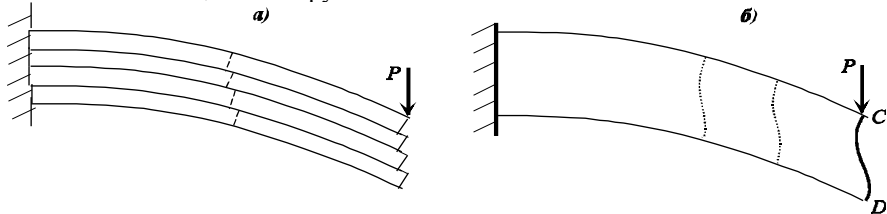
При напречното огъване възникват няколко особености.

Първата особеност се изразява в това, че хипотезата на Бернули за равнинност на сеченията не е валидна. Напречните сечения на гредата при огъване се изкорубват. Това може да се покаже с помощта на следния пример – фиг.7.9.

Фиг. 7.8

Ако от няколко гладко рендосани дъски образуваме една гредата и я натоварим на напречно специално огъване, тя ще се деформира, както е

показано на фиг.7.9-а. В края на гредата ще се образува стъпаловидна повърхност. Ако гредата е пълностенна и я натоварим по същия начин, тя ще се деформира, както е показано на фиг. 7.9-б. Гредата ще се опита да съхрани правите ъгли в т.С и т. D, но за да стане това, сечението трябва да се изкоруби, както е показано на фигурата. Очевидно, близко стоящите до него сечения също се изкорубват.

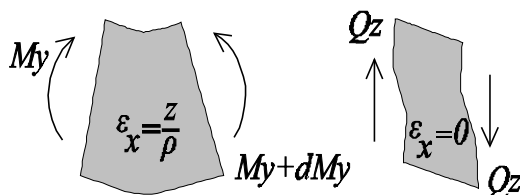


**Фиг. 7.9. Деформация на сечението при напречно специално огъване**

Втората особеност се изразява в това, че вследствие наличие на сръзващата сила в напречното сечение на гредата се появяват тангенциални напрежения.

### Б) Нормални напрежения

Ако разгледаме елемент с дължина  $dx$  от гредата и приложим принципа на суперпозицията, огъващият момент и сръзващата сила поотделно ще деформират елемента както е показано на фиг.7.10.



**Фиг. 7.10**

Ще обърнем внимание, че елементите поотделно не са в равновесие, но всъщност това е един и същ елемент с разделени усилия, които са в

равновесие.

Както видяхме, огъващият момент предизвиква деформации и напрежения по оста на гредата, които определихме по-горе. Сръзващата сила (ще считаме, че по оста на гредата тя е постоянна) деформира елемента така, че удължения на влакната по дължината на гредата не се получават (изкривяванията на двете сечения са еквиливантни), следователно линейната деформация по оста на гредата от сръзващата сила е нула. От това следва, че имаме основание нормалните напрежения да се определят по същата формула 7.6, както при чисто огъване.

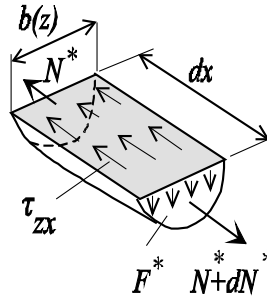
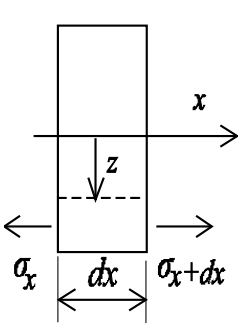
Ако сръзващата сила не е постоянна, тогава двете съседни сечения ще деформират по различен начин и ще се появят допълнителни линейни деформации, а от там и допълнителни линейни напрежения. Този въпрос е изследван в Теорията на еластичността, където е доказано, че грешката,

която се допуска при използване на формула 7.6 е от порядъка на отношението  $h/l$ , където  $h$  – височина на напречното сечение,  $l$  – дължина на гредата. Тъй като за греди  $h/l < 1/10$ , следва, че в този случай максималната грешка не превишава 10 %, която се приема за допустима.

### В) Тангенциални напрежения

За да определим тангенциалните напрежения, ще разгледаме отново диференциален елемент от гредата с дължина  $dx$  – фиг.7.7. Щом  $Q_z \neq 0$ , на основание на зависимостите на Журавски следва, че огъващият момент  $M_y$

ще бъде линейна или друга функция от височина, т.е. от двете страни на елемента моментът ще бъде различен, а значи и нормалните напрежения ще бъдат също различни. От елемента с дължина  $dx$  изрязваме елемент с равнина, успоредна на неутралния пласт – фиг. 7.11, отстояща на



Фиг. 7.11

разстояние  $z$  от нея. Поради нееднаквостта на нормалните напрежения няма да бъдат еднакви и нормалните сили, действащи върху отсечената част от елемента – ако от едната страна нормалната сила е  $N^*$ , от другата страна тя ще има нарастване –  $N^* + dN^*$ . За да бъде в равновесие, следва, че върху надлъжното сечение на елемента трябва да действуват тангенциални напрежения  $\tau_{zx}$ . Приемаме, че това напрежение е равномерно разпределено по ширината  $b(z)$  на елемента. Записваме уравнението за равновесие на елемента:

$$\sum x = 0 \rightarrow N^* + dN^* - N^* - \tau_{zx} b(z) dx = 0 \rightarrow \tau_{zx} = \frac{dN^*}{b(z) dx}$$

На основание на интегралната връзка между нормалното напрежение и нормалната сила, получаваме:

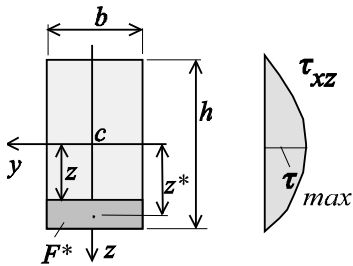
$$N^* = \int_{F^*} \sigma_x dF = \int_{F^*} \frac{M_y}{J_y} z dF = \frac{M_y}{J_y} \int_{F^*} z dF = \frac{M_y S_y^*}{J_y} \rightarrow$$

$$\frac{dN^*}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{M_y S_y^*}{J_y} \right) = \frac{S_y^*}{J_y} \frac{dM_y}{dx} = \frac{S_y^*}{J_y} Q_z$$

Тук  $S_y^*$  е статичния момент на отрязаната част от напречното сечение с площ  $F^*$  спрямо оста  $Y$  на напречното сечение на гредата. Заместваме в по-горното уравнение и получаваме:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{J_y b_{(z)}} \quad (7.11)$$

Формула 7.11 се нарича **формула на Журавски**, предложена от него към средата на 19 век (по това време в Русия се строи железницата Петербург – Москва и е имало нужда от строителство на големи мостови конструкции). От ЗВТН следва, че такова напрежение ще действва освен в



успоредните на неутралния пласт равнини, но и в перпендикулярната на тях равнина – напречното сечение на гредата. Ще приложим тази формула за правоъгълно сечение с размери  $b/h$  - фиг.7.12. Имаме:

$$J_y = \frac{bh^3}{12}, \quad b_{(z)} = b = const$$

Статичният момент на отрязаната част от сечението ще намерим като произведение на площта на тази част с разстоянието от нейния център на тежест до ос  $y$ :

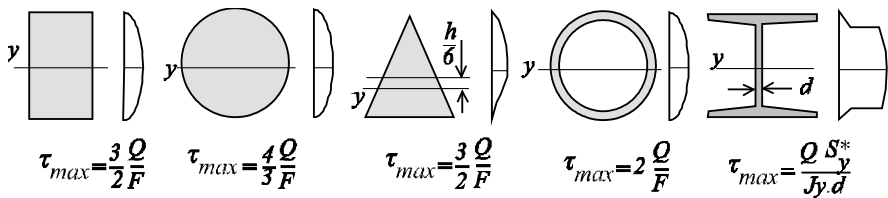
Фиг. 7.12

$$S_y^* = F^* z^* = b \left( \frac{h}{2} - z \right) \left( z + \frac{h}{4} - \frac{z}{2} \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

Заместваме в 7.11 и получаваме:

$$\tau_{zx} = \frac{6Q_z}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \rightarrow \tau_{zx, \max} \Big|_{z=0} = \frac{3Q_z}{2bh} = \frac{3Q_z}{2F} \quad (7.12)$$

Получихме, че тангенциалното напрежение се разпределя по височината на профила по параболичен закон. (От тук става ясно защо депланацията на сечението по височина е променлива – фиг.7.10). В случая максималното тангенциално напрежение действва по равнина, съвпадаща с неутралния пласт на гредата. За повечето сечения това е точно така, но има и изключения. Големината на това напрежение е от порядъка на силата, разделена с площта на сечението, като за различните профили имаме корекционен коефициент, вариращ в границите  $K=1,33-2$ . (Този коефициент се нарича **коефициент на сръзване** - [27]). На фиг.7.13 са показани максималните тангенциални напрежения за няколко често срещани сечения. Вижда се също, че характера на разпределение на напрежението по височината на профила зависи от вида на профила.



Фиг. 7.13

По-горе видяхме, че най-рационален профил за огъване е двойно Т-образният. Диаграмата на тангенциалното напрежение за него в местата на промяната на дебелината на профила претърпява скок – виж фиг.7.13. Специално за изчислението на максималното тангенциално напрежение в справочниците за геометричните характеристики на този профил може да се намери величината  $S_y^*$ , представляваща в случая статичния момент на едната половина на сечението спрямо ос  $y$ . Огъването на тънкостенните профили имат и ред други особености, които ще разгледаме в следващата глава.

### Г) Якостно оразмеряване при напречно специално огъване

Тъй като сега имаме както нормални, така и тангенциални напрежения, якостното оразмеряване изисква налагане на две условия:

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_{y,\max}}{W_y} \leq [\sigma] \quad \tau_{xz,\max} \leq [\tau] \quad (7.13)$$

Обикновено от първото уравнение определяме необходимия съпротивителен момент, а второто уравнение служи за проверка.

Може да се покаже, че в общия случай максималното тангенциалното напрежение от срязващата сила  $Q_z$  е доста по-малко от максималното нормално напрежение, което предизвиква огъващия момент  $M_y$ . Но въпреки това, тангенциалното напрежение винаги следва да се проверява, особено що се отнася за дървени греди, за които е известно, че в надлъжно направление се съпротивляват слабо на срязване. В комбинация с нормалното напрежение, за някои профили, като двойно Т-образния, в определени точки от сечението възникват едновременно големи нормални и тангенциални напрежения, които създават в тези точки сложно напрегнато състояние, за което както знаем следва да се изчисли еквивалентното напрежение. За двойно Т-образния профил това са местата на прехода от стеблото към пояса на профила.

При задачите от огъване може да се посочи една особеност, която при другите съпротиви възниква по-рядко. Когато оразмеряваме греда, работеща на огъване, ние вземаме винаги максималния огъващ момент. Но огъващият момент в останалите сечения е винаги по-малък (виж например

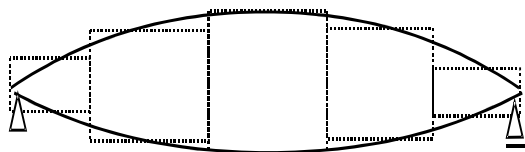
фиг.7.8) и следователно ако приемем, че гредата е с постоянно сечение, другите сечения ще бъдат преоразмерени. Ако искаме във всяко сечение гредата да е еднакво натоварена, за всяко сечение съпротивителния момент би следвало да се определи от условието:

$$W_y = \frac{M_y}{[\sigma]} \quad (7.14)$$

където  $M_y$  е огъващия момент в съответното сечение. Така например за гредата от фиг.7.8 за левия участък имаме  $M_y = P \cdot x/2$  и за да бъдат напреженията еднакви по цялото протежение на участъка, съпротивителния момент следва да се изменя по закона  $W_y = P \cdot x/2[\sigma]$ . Ако приемем, че гредата ще бъде изпълнена от кръгло плътно сечение (което се приема обикновено за въртящи се валове), ще получим:

$$\frac{\pi D_{(x)}^3}{32} = \frac{Px}{2[\sigma]} \rightarrow D_{(x)} = \sqrt[3]{\frac{16Px}{\pi [\sigma]}}$$

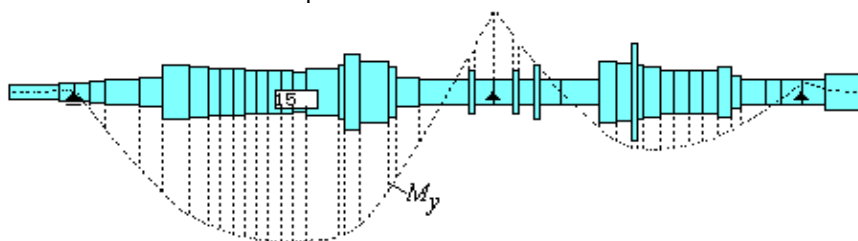
Поради симетрията в другият участък диаметърът ще се изменя по същия закон



**Фиг. 7.15. Вал с оптимална форма**

Ако се изработи такъв вал, ще получим, че той би трябвало да изглежда както е показано на фиг.7.15 с плътна линия. Разбира се такъв вал никога няма да изработи. В такъв случай се изработват

**степенчати** валове, както е показано на фиг.7.15 с пунктирна линия. На фиг.7.16 е показан реално изпълнен турбинен триопорен вал (без дисковете и лопатките), където е приведена и диаграмата на огъващият момент от собственото тегло и натоварването на вала.



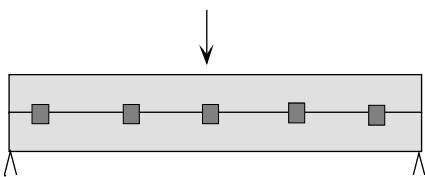
**Фиг. 7.16. Реален турбинен вал**

В определени случаи гредата може да се състои от няколко греди (листовете), работещи съвместно, подобно ресорите на автомобилите. Схемата на натоварване в този случай ще бъде като показаната на фиг.7.9. С



помощта на уравнение 7.4 лесно може да се покаже, че многолистовата греда е  $n^2$  по-еластична (където  $n$  - брой на листовете), отколкото пълностенна греда със същите размери на напречното сечение. Но еластичността ще има място само тогава, когато отделните листове на гредата могат да преплъзгват при огъването си свободно един спрямо друг, което отнесено към ресорите означава същите да се поддържат чисти и смазани. В противен случай триенето между листовете ще бъде толкова голямо, че те ще работят съвместно като пълностенна греда.

В други случаи се налага да се увеличава триенето. Натоварването може да бъде толкова голямо, че една греда не може да го поеме. В такъв



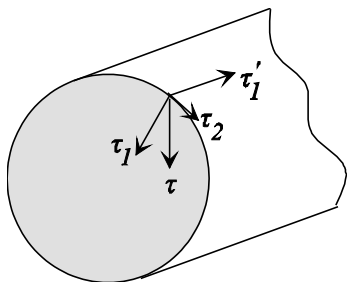
Фиг. 7.17

случай можем да използваме две греди, положени една върху друга - фиг.7.17, образуващи съставна греда. Но ползата от това ще бъде много малка, ако не предприемем мерки против преплъзгването на двете греди

една спрямо друга. Това може да стане чрез заварка на двете греди (ако са метални), а може и чрез шпонки, както е показано на фигурата, каквото решение може да се използва за метални и дървени греди. Тъй като товароносимостта на гредата се определя от съпротивителния момент, който зависи от  $h^2$  (където  $h$  - височина на напречното сечение на единичната греда), а коравината - от инерционния момент, зависещ от  $h^3$ , може да се пресметне, че съставната греда от фиг.7.17 ще бъде 4 пъти по-товароемка и 8 пъти по-корава спрямо единичната греда.

#### Д) Неточности на формулата на Журавски

Според 7.11 тангенциалното напрежение трябва да е паралелно на напречната сила  $Q_z$ . Можем обаче да покажем, че това не е вярно за всички профили.



Фиг. 7.18

Ако вземем греда с кръгло сечение и приемем, че тангенциалното напрежение близо до контура е паралелно на напречната сила  $Q_z$ , ние можем да го разложим на компонентата  $\tau_1$ , насочена по радиуса и компонентата  $\tau_2$ , насочена допирателно към контура - фиг.7.18. Ако съществува радиалната компонента  $\tau_1$ , от ЗВТН би следвало да съществува и компонентата  $\tau_1' = \tau_1$ , действаща по външната повърхност

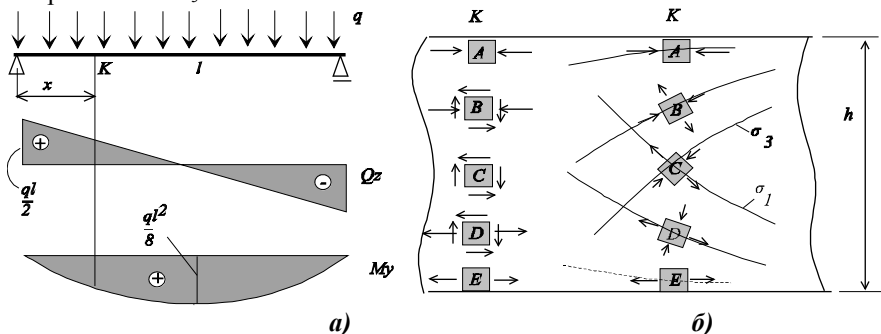
на гредата. Но такова напрежение по повърхността не съществува и следователно напрежението  $\tau_1$  е равно на нула. Но тогава напрежението  $\tau$

съвпада с  $\tau_z$ , което е допирателно към контура, а не успоредно на силата  $Qz$ . От това следва още, че ако разложим  $\tau_z$  по вертикалата и хоризонталата, ще получим, че в сечението ще действа и хоризонтална компонента  $\tau_{xy}$ . В Теорията на еластичността се доказва, че за пълностенните профили хоризонталната компонента на тангенциалното напрежение може да се пренебрегне в сравнение с вертикалната компонента, за която формулата на Журавски е достатъчно точна.

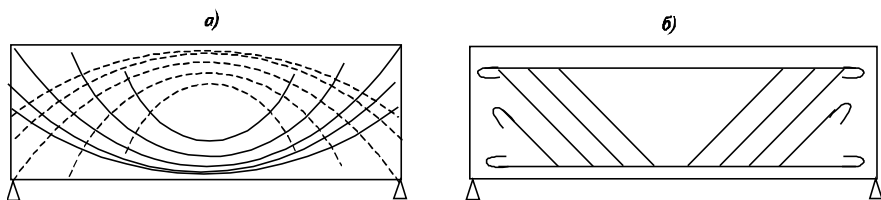
### Е) Анализ на напрегнатото състояние при напречно специално огъване

Ще разгледаме гредата на две опори с правоъгълно сечение под действието на равномерно разпределен товар – фиг.7.19-а, често срещан в практиката случай. Гредата очевидно е натоварена на напречно специално огъване, тъй като във всяко сечение възниква огъващ момент и сръзвваща сила.

По височината ( $h$ ) на напречното сечение на гредата възникват нормални и тангенциални напрежения, които се определят по намерените по-горе изрази 7.6 и 7.12. Картината на напрегнатото състояние в пет точки - А, В, С, D и Е има вида, както е показано на фиг.7.19-б (лява колона). Във всяка от точките възниква равнинно напрегнато състояние. Главните напрежения и направления ще определим съгласно изрази 4.31 и 4.33. Картината на главните напрежения и направления в съответните точки е показана на фиг.7.19-б (дясна колона). Въвеждаме понятието **траектория на главно напрежение** като линия, която се явява допирателна към направлението на главното напрежение в съответната точка. Понеже в случая имаме две ненулеви главни напрежения (третото е нула), ще имаме и две семейства траектории на главните напрежения. Те са показани на фиг. 7.19-б с пунктирни линии, които ще се пресичат под прав ъгъл, тъй като главните направления са взаимно перпендикулярни. За цялата гредата траекториите на главните напрежения ще имат вида, както е показано на фиг.7.20-а – с плътна линия на напрежението  $\sigma_l$  и с пунктирна линия – на напрежението  $\sigma_3$ .



Фиг. 7.19. Траектории на главните напрежения

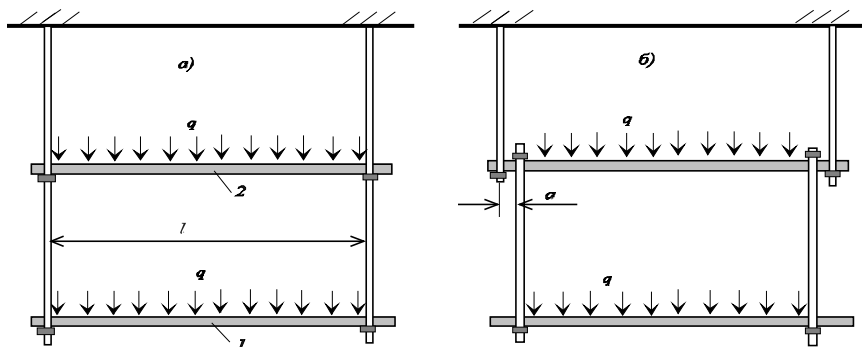


Фиг. 7.20

Траекториите на главните напрежения са особено важни за стоманобетонни греди. Известно е, че бетонът се съпротивлява зле на опън. За да се поемат оъновите напрежения, в гредата се залага предварително стоманена армировка. Очевидно, най-благоприятното разположение на тази армировка ще бъде по траекторията на първото главно напрежение. На практика, поради твърде сложната форма на тази траектория, армировката се полага както е показано на фиг.7.20-б.

**Ж) Пример 7.1. Разрушение на носеща конструкция**

Носещата конструкция на две платформи е била проектирана както е показано на фиг.7.21-а. Два дълги пръта с резба преминават през гредите 1 и 2, като неподвижността на гредите е осигурена чрез гайки, а прътите са хванати към тавана. Понеже не е възможно да се нареже толкова дълга резба за застопоряване на втората платформа, строителите изменили конструкцията съгласно фиг.7.21-б, като окачили първата платформа към втората, скъсявайки малко дължината на първата платформа с величината  $2a$ . Да се определят максималните нормални и тангенциални напрежения в двете греди при двете изпълнения. Напречните сечения на гредите имат инерционен момент  $J_y$  и площ  $F$ , коефициент на срязване за максималните тангенциални напрежения  $K=2$ .



Фиг. 7.21

В случай на първото изпълнение всяка от гредите ще работи самостоятелно. Разрезните усилия във всяка от гредите ще бъде както за схемата на натоварване на фиг.7.19-а. Максималните нормални и тангенциални напрежения в гредите ще бъдат:

$$\sigma_{\max}^a = \frac{M_{y,\max}}{W_y} = \frac{ql^2}{8W_y} \quad \tau_{\max}^a = k \frac{Q_z}{F} = 2 \frac{ql}{2F} = \frac{ql}{F}$$

Тук разпределеният товар включва полезния товар и теглото на платформите.

За втория случай максималните тангенциални и нормални напрежения за първата греда ще бъдат почти същите (малко ще се намалят заради скъсяването на гредата). За втората греда обаче натоварването се променя съществено. В този случай тя трябва да носи освен своя товар, така и товара от първата греда. Допълнителните разрезни усилия от товара на първата платформа ще бъдат както за схемата на натоварване съгласно фиг.7.1, където вместо  $P$  трябва да заместим  $ql/2$  Максималните нормални и тангенциални напрежения за втората греда ще бъдат:

$$\sigma_{\max}^b = \frac{M_{y,\max}}{W_y} = \frac{ql^2}{8W_y} + \frac{qla}{2W_y} \quad \tau_{\max}^b = k \frac{Q_z}{F} = 2 \left( \frac{ql}{2F} + \frac{ql}{2F} \right) = 2 \frac{ql}{F}$$

От тези резултати се вижда, че във втория случай напреженията ще нарастнат почти два пъти.

Описаното в тази задача се е случило през 1981 г. в хотел Kansas City Hyatt-Regency, САЩ- [35]. При строежа на платформите (предназначени за ресторанти) е допусната подобна грешка, в резултат на което по-късно платформите се разрушават по време на бал. Загиват повече от 100 души, превръщайки тази катастрофа в най-голямата катастрофа на конструкции в САЩ.

Този пример недвусмислено показва, че при проектиране на конструкциите проектантът следва да отчита освен всичко друго и начина на изработване на детайлите и техния монтаж.

### **7.3. Диференциално уравнение на еластичната линия на праволинейна греда**

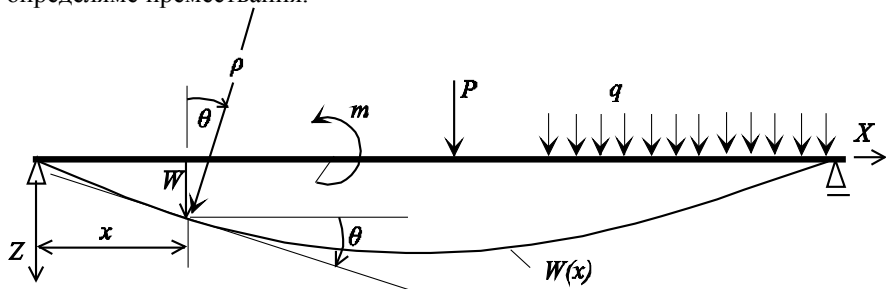
#### ***А) Диференциално уравнение от II ред.***

Ще разгледаме праволинейна греда с постоянно напречно сечение, закрепена и натоварена по определен начин – фиг.7.22.

Деформираната ос на гредата наричаме еластична линия.

Уравнението на еластичната линия е нужно по две причини. Първо – съществуват норми за максималните напречни премествания на съоръжения. Така например за главните греди на носещите конструкции максималното преместване не бива да превишава величината  $L/400$ , където

$L$  – дължина на гредата. Втората причина е, че при статически неопределените системи (ще бъдат разгледани по-късно) решението на задачата дори за разрезните усилия е невъзможно без да знаем да определяме премествания.



Фиг. 7.22

Поставяме задачата да определим аналитичния израз на еластичната линия в координатната система  $XZ$ . Напречното преместване на оста на гредата ( $W$ ) ще считаме положително, ако е по ос  $Z$ , а ъгълът на наклона ( $\theta$ ) ще е положителен, ако е по посоката на движение на часовата стрелка. Ъгълът на наклона е ъгъла между допирателната към еластичната линия в дадената точка и ос  $X$  на гредата.

Видно от фигурата 7.22, ъгълът на наклона на еластичната линия и ъгълът на завъртане на сечението са еднакви.

От една страна за кривината на гредата получихме израза 7.4, който ще запишем отново:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EJ_y} \quad (7.15)$$

Тук  $\rho$  – радиус на кривина. От друга страна, от математиката е известно, че кривината може да се изрази чрез функцията  $W(x)$ :

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{W'''}{\left(1 + (W')^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (7.16)$$

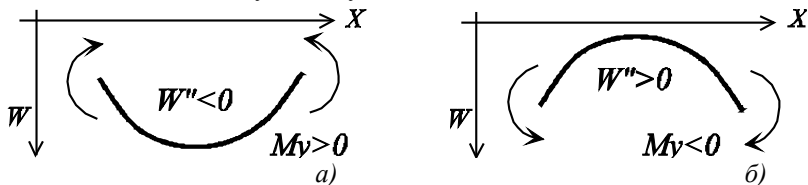
Тук знакът отдясно зависи от това, дали координатната система е ляво или дясно ориентирана.

От 7.15 и 7.16 получаваме:

$$\frac{W'''}{\left(1 + (W')^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M_y}{EJ_y} \quad (7.17)$$

За да уточним кой от знаците следва да вземем в това уравнение (плюс или минус), ще забележим, че знаменателят от ляво е винаги положителен. Следователно кой знак ще вземем, зависи от това, какви са знаците на огъващия момент  $M_y$  и втората производна на преместването  $W''$ .

От фиг.7.23-а може да се види, че ако огъващият момент е положителен, гредата ще се огъне така, че се получава максимум на  $W$ , а значи  $W''$  е отрицателна. Обратно, ако моментът е отрицателен, гредата се огъва обратно, при което  $W$  получава минимум и следователно  $W''$  е положителна. С други думи, в избраната координатна система знаците на  $W''$  и  $M_y$  са винаги противоположни. От тук следва, че в уравнение 7.17 в дясно е валиден знака 'минус'. Получаваме:



Фиг. 7.23

$$\frac{W''}{(1 + (W')^2)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{M_y}{EJ_y} \quad (7.18)$$

Уравнение 7.18 се нарича пълно диференциално уравнение на еластичната линия. То е валидно за малки и големи премествания на гредата в рамките на валидността на закона на Хук (тъй като 7.15 е изведено при предположението, че е валиден закона на Хук). За да имаме обаче големи премествания и напрежения под границата на пропорционалност, гредата трябва да е тънка или гъвкава. За съжаление това уравнение може да бъде решено само със специални методи или числено.

Но както отбелязахме в гл.1, в Съпротивление на материалите разглеждаме само малки премествания и завъртвания. При малки завъртвания ( $\leq 5^\circ$ ) производната  $W'$  в знаменателя на 7.18 е много по-малка от единица –  $W' \ll 1$  ( $W' = \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} 5^\circ = 0,087$ ), а квадратът на  $W'$  ще бъде още по-малък спрямо единицата. Следователно в този случай  $W'$  може да се пренебрегне. Получаваме:

$$W'' = - \frac{M_y}{EJ_y} \quad (7.19)$$

Това уравнение се нарича опростено диференциално уравнение на еластичната линия. С него можем да определим преместването и завъртването на гредата, докато същите са малки.

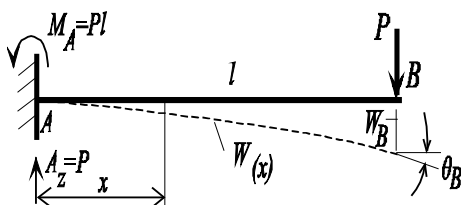
Решението на уравнението има вида:

$$W = - \iint \frac{M_y}{EJ_y} dx dx + C_1 x + C_2 \quad (7.20)$$

Тук  $C_1$ ,  $C_2$  – интеграционни константи, които се определят от граничните условия на закрепване на гредата. Ако една греда има  $n$  на брой участъка, ще имаме  $2n$  на брой константи, за които трябва да се посочат  $2n$  на брой гранични условия.

Произведението  $EJ_y$  се нарича коравина на огъване на гредата. Колкото е по-голямо това произведение, толкова по-малко е преместването.

От 7.20 виждаме, че преди да определим преместването е необходимо да познаваме огъващия момент  $M_y$  за всеки от участъците.



Фиг. 7.24

Б) *Пример 7.2.* Да се определи уравнението на еластичната линия за конзолно закрепената греда, натоварена със сила в края – фиг. 7.24.

Огъващият момент на разстояние  $x$  запъването ще бъде:

$$M_y = A_z x - M_A = Px - Pl$$

Заместваме в 7.20 и получаваме:

$$W = \frac{P}{EJ_y} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2$$

$$\theta = W' = \frac{P}{EJ_y} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

Граничните условия на закрепване на гредата са:

1. При  $x=0$   $W=0$ , откъдето  $C_2=0$ .
2. При  $x=0$   $W'=0$ , откъдето  $C_1=0$ .

От тук получаваме уравнението на еластичната линия и на ъгъла на наклона:

$$W = \frac{P}{EJ_y} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad \theta = \frac{P}{EJ_y} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

При  $x=l$  получаваме преместването на т.В и завъртането на сечението  $\theta_B$  в тази точка.

$$W_B = \frac{Pl^3}{3EJ_y} \quad \theta_B = \frac{Pl^2}{2EJ_y}$$

### **В) Диференциално уравнение от IV ред**

Ако диференцираме двукратно уравнение 7.19 (при  $EJ_y = \text{const}$ ) и използваме диференциалните зависимости на Журавски, ще получим:

$$W'''' = -\frac{1}{EJ_y} M_y' = -\frac{Q_z}{EJ_y} \quad W'''' = -\frac{Q_z'}{EJ_y} = \frac{q}{EJ_y} \quad (7.21)$$

Или:

$$W'''' = \frac{q}{EJ_y} \quad (7.22)$$

Диференциално уравнение 7.22, доколкото е получено от 7.19, също се използва за определяне на малките премествания на гредата. Предимството му е, че няма нужда от предварително определяне на огъващия момент (разпределеният товар  $q$  е винаги даден). Недостатъкът му е, че броят на интеграционните константи се увеличава на четири. Решението на 7.22 има вида:

$$W = \iiint \int \frac{q}{EJ_y} dx dx dx dx + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad (7.23)$$

За определяне на интеграционните константи следва да се зададат не само условията на закрепване, но и условията на натоварване в краищата на участъка на гредата.

Уравнение 7.22 има още едно предимство. След решението му, на основание на 7.19 и 7.21 можем да определим разрезните усилия в разглеждания участък:

$$M_y = -EJ_y W'' \quad Q_z = -EJ_y W'''' \quad (7.24)$$

Уравнения 7.22-7.24 са удобни за численото решение на задачата с помощта на компютър.

## **7.4. Метод на началните параметри**

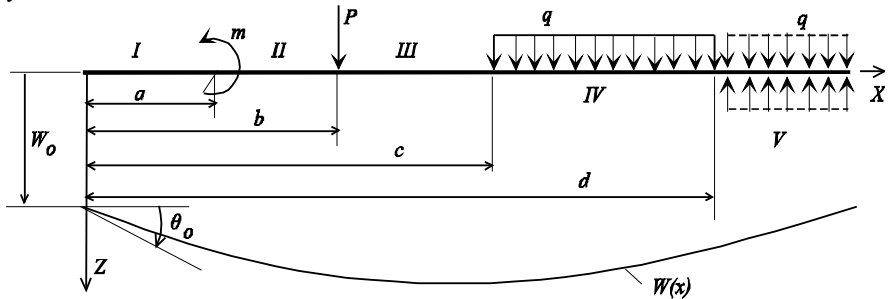
### **А) Уравнение на Клебш**

Както видяхме, при решаване на опростеното диференциално уравнение се появяват интеграционни константи, които при по-голям брой участъци водят до системи алгебрични уравнения и затова е удобно за аналитично решение на задачата. Потърсени са методи за снижение на броя на неизвестните константи. Такъв метод е методът на началните параметри, предложен от Клебш.

Разглеждаме греда, натоварена с момент, сила и разпределен товар, координатите на прилагане на които са известни – фиг. 7.25. Посочените на фигурата посоки на товарите се считат за положителни.



За определяне уравнението на еластичната линия  $W(x)$  ще използваме уравнение 1.19. Както се изисква от това уравнение, най-напред ще определим функциите на огъващите моменти за всеки от участъците:



Фиг. 7.25

$$M_{y,I} = 0$$

$$M_{y,II} = -m$$

$$M_{y,III} = -m - P(x - b)$$

$$M_{y,IV} = -m - P(x - b) - q(x - c)^2 / 2$$

$$M_{y,V} = -m - P(x - b) - q(x - c)^2 / 2 + q(x + d)^2 / 2 \quad (7.25)$$

За по-лесното записване на огъващият момент в последния участък мислено прибавяме и изваждаме разпределен товар  $q$ , действащ на предния участък, от което в натоварването нищо не се променя.

Първото интегриране на ДУ 7.19 ще запишем във вида:

$$EJ_y W' = - \int M_y dx + C \quad (7.26)$$

Заместваме 7.25 в 7.26 и получаваме:

$$EJ_y W'_I = C_1$$

$$EJ_y W'_{II} = C_2 + m(x - a)$$

$$EJ_y W'_{III} = C_3 + m(x - a) + P(x - b)^2 / 2$$

$$EJ_y W'_{IV} = C_4 + m(x - a) + P(x - b)^2 / 2 + q(x - c)^3 / 6$$

$$EJ_y W'_V = C_5 + m(x - a) + P(x - b)^2 / 2 + q(x - c)^3 / 6 - q(x - d)^3 / 6 \quad (7.27)$$

Тук при интегрирането във втория участък, доколкото константата  $C_2$  още не е определена, към нея е добавена константата  $ma$ . Константата  $C_1$  очевидно е равна на  $EJ_y W'_{(o)} = EJ_y \theta_0$ , където  $\theta_0$  е ъгълът на наклона на еластичната линия в началото на гредата – фиг.7.25.

На границите между участъците ъглите на наклона са непрекъснати функции – при  $x=a$   $\theta_2=\theta_1$ , при  $x=b$   $\theta_3=\theta_2$ , при  $x=c$   $\theta_4=\theta_3$  и при  $x=d$   $\theta_5=\theta_4$ . При тези условия от 7.27 намираме, че  $C_2=C_1$ ,  $C_3=C_2$ ,  $C_4=C_3$ ,  $C_5=C_4$ , т.е. всички константи са равни помежду си и равни на  $EJ_y \theta_0$ .

Извършваме второ интегриране на 7.19, респективно на 7.26. Можем да запишем:

$$EJ_y W = \int (EJ_y W') dx + D \quad (7.28)$$

Прилагаме формула 7.28 за всеки от участъците и получаваме:

$$EJ_y W_I = D_1 + C_1 x$$

$$EJ_y W_{II} = D_2 + C_2 x + m(x-a)^2 / 2$$

$$EJ_y W_{III} = D_3 + C_3 x + m(x-a)^2 / 2 + P(x-b)^3 / 6$$

$$EJ_y W_{IV} = D_4 + C_4 x + m(x-a)^2 / 2 + P(x-b)^3 / 6 + q(x-c)^4 / 24$$

$$EJ_y W_V = D_5 + C_5 x + m(x-a)^2 / 2 + P(x-b)^3 / 6 + q(x-c)^4 / 24 - q(x-d)^4 / 24$$

(7.29)

Константата  $D_1$  е равна на  $EJ_y W_0$ , където  $W_0$  е преместването на гредата в началото – фиг.7.25. От условията за непрекъснатост на функцията на преместване в границите между участъците, подобно за константите  $C_i$  ( $i=1-5$ ), установяваме, че  $D_2=D_1$ ,  $D_3=D_2$ ,  $D_4=D_3$ ,  $D_5=D_4$ , като всичките са равни на  $EJ_y W_0$ .

От 7.29 може да се забележи, че уравнението на последния участък съдържа уравненията на всички предишни участъци. Това дава възможност уравненията за преместването на всички участъци да се запише наведнъж по следния начин:

$$EJ_y W_{(x)} = EJ_y W_0 + EJ_y \theta_0 x \Big|_I + m \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_{II} + P \frac{(x-b)^3}{6} \Big|_{III} + q \frac{(x-c)^4}{24} \Big|_{IV} - q \frac{(x-d)^4}{24} \Big|_V \quad (7.30)$$

Тук вертикалните линии означават, че уравнението за съответния участък е валидно от началото до съответната линия. Това уравнение е получено за пръв път от Клебш.

Предимството на това уравнение е, че независимо от броя на участъците, броят на неизвестните константи е само две -  $W_0$  и  $\theta_0$ . Те се определят от условията на закрепване на гредата.

Така например, ако гредата е запъната в началото, тогава  $W_0 = 0$  и  $\theta_0 = 0$ . Ако гредата в началото е подпряна, тогава само  $W_0 = 0$ . За определяне на  $\theta_0$  е необходимо още едно условие, което неминуемо съществува.

Тъй като параметрите  $W_0$  и  $\theta_0$  са параметри в началото на гредата, методът носи названието метод на началните параметри.

Ще обърнем внимание, че за да се напише уравнението на Клебш, предварително трябва да определим само опорните реакции на гредата. Между опорните реакции и зададените сили и моменти не бива да се прави разлика.

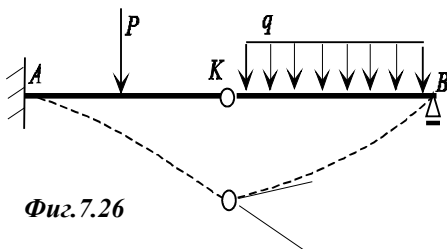
*Б) Пример 7.3.* Да се напише уравнението на еластичната линия за конзолно закрепената гредата от фиг.7.24.

Тъй като в началото гредата е запъната, то  $W_0 = 0$  и  $\theta_0 = 0$ . Вземайки предвид че гредата е с един участък, на основание на 7.30 можем да запишем:

$$EJ_y W_{(x)} = M_A \frac{(x-0)^2}{2} - A_z \frac{(x-0)^3}{6} = P \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

Получаваме същия резултат, както чрез решението на ДУ на еластичната линия, но много по-лесно.

При написването на уравнението, сили и моменти, действащи в десния край на гредата, явно не участвуват (както в горния пример). Те обаче се отчитат неявно чрез опорните реакции.



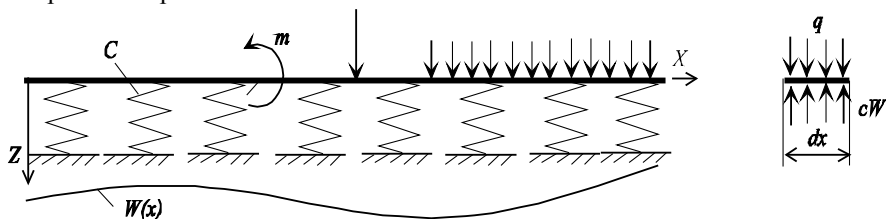
Фиг. 7.26

### ***В) Особенности при уравнението на Клебш***

При извода на уравнението на Клебш допуснахме, че функцията на еластичната линия и нейната производна по цялото протежение на гредата са непрекъснати. Ако гредата обаче е Герберова (която има една или повече междинни стави) – фиг.7.26, тогава ъгълът на завъртане (първата производна на преместването) в тези точки претърпява прекъсване. Следователно за такава гредата нямаме право да напишем уравнението на Клебш от началото до края. Можем обаче да запишем две уравнения – от началото до т.К и от т.К до края на гредата. Естествено за всяка от гредите се поражда по две неизвестни константи, за които следва да зададем съответния брой гранични условия.

## 7.5. Огъване на греда, лежаща на еластична основа

В предишните случаи гредата беше закрепена само в определени точки, като навсякъде другаде е свободна. Има обаче случаи, когато гредата е възпрепятствувана да се деформира свободно по цялото си протежение. Такъв е случаят, ако гредата бъде поставена върху почва и бъде натоварена с вертикални сили. Подобен е случаят, ако гредата бъде потопена в течност, но плаваща, какъвто е случаят с корпуса на всеки кораб на вода. В тези случаи върху гредата освен зададените сили действуват и реактивни сили от страна на основата – фиг.7.27. Основата можем да си я представим като легло от еластични пружини, които се съпротивляват пропорционално на напречното преместване.



Фиг. 7.27. Греда на еластична основа

Ако разгледаме малък елемент с дължина  $dx$ , в напречно направление върху елемента ще действуват два вида разпределени сили – от зададеното натоварване  $q$  [ $N/m$ ] и от реакцията на еластичната основа –  $cW$ . От тук се вижда, че за да получим дименсията на реакцията на еластичната основа като на  $q$ , дименсията на коефициента  $C$ , който наричаме коефициент на еластичната основа, е  $N/m^2$ . Така например за греда, потопена в течност, коефициентът може да бъде точно изчислен –  $c = \gamma b$ , където  $\gamma$  - обемно тегло на течността,  $b$  – ширина на гредата. За други случаи коефициентът на еластичната основа може да се намери в специализирани таблици и в [11].

Диференциалното уравнение на гредата, лежаща на еластична основа, се получава лесно. За целта в диференциалното уравнение на обикновената греда 7.22 вместо зададения товар  $q$  трябва да зададем товара  $q - cW$ , където членът  $cW$  отчита реакцията (на единица дължина) на еластичната основа. Така получаваме:

$$W^{IV} = \frac{q - cW}{EJ_y} \rightarrow W^{IV} + \frac{c}{EJ_y}W = \frac{q}{EJ_y} \quad (7.31)$$

Уравнение 7.31 е диференциалното уравнение на гредата на еластична основа. Решението му, за разлика от ДУ на обикновената греда 7.22, е доста по-сложно. Ако се ограничим за случая, когато  $q=0$ , решението на 7.31 във формата на метода на началните параметри има вида:

$$W = K_1 W_0 + K_2 L \theta_0 - \frac{K_3 L^2}{EJ_y} M_0 - \frac{K_4 L^3}{EJ_y} Q_0 \quad (7.32)$$

където  $K_1, K_2, K_3, K_4$  са функции на Крилов:

$$\begin{aligned} K_1 &= ch\xi \cdot \cos\xi & K_2 &= \frac{1}{2}(ch\xi \cdot \sin\xi + sh\xi \cdot \cos\xi) \\ K_3 &= \frac{1}{2}sh\xi \cdot \sin\xi & K_4 &= \frac{1}{4}(ch\xi \cdot \sin\xi - sh\xi \cdot \cos\xi) \end{aligned} \quad (7.33)$$

Тук  $\xi$  е безразмерна координата:

$$\xi = \frac{x}{L}; \quad L = \sqrt[4]{\frac{4EJ_y}{c}} \quad (7.34)$$

Ъгълът на наклона, огъващият момент и срязващата сила се определят както при обикновената греда:

$$\theta = W'; \quad M_y = -EJ_y \theta'' = -EJ_y W'''; \quad Q_z = M_y' = -EJ_y W'''' \quad (7.34)$$

При диференцирането на функциите на Крилов може да се използват следните им свойства:

$$K_1' = -4 \frac{K_4}{L}; \quad K_2' = \frac{K_1}{L}; \quad K_3' = \frac{K_2}{L}; \quad K_4' = \frac{K_3}{L} \quad (7.35)$$

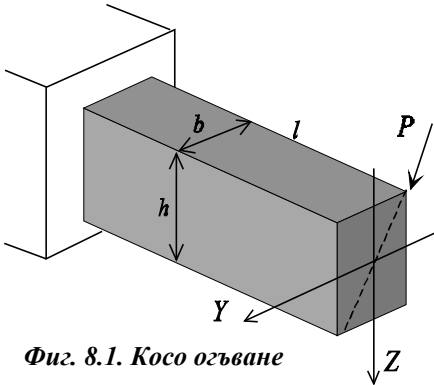
За определяне на неизвестните начални параметри следва да се зададат  $4n$  гранични условия за краищата на участъците, където  $n$  – брой на участъците на гредата. Граничните условия обхващат не само преместванията и завъртванията, но и силите и моментите. В граничните условия се отчитат и съсредоточените сили и моменти.

## 8. СЛОЖНИ СЪПРОТИВИ

До тук разгледахме простите съпротиви – опън/натиск, усукване и огъване. Твърде често обаче върху гредите действуват едновременно по няколко разрезни усилия, при което може да имаме произволна комбинация от тях. В тези случаи казваме, че имаме сложна съпротива. За да определим напрегнатото и деформирано състояние в тези случаи, използваме принципа на суперпозицията. Има няколко характерни случая на сложна съпротива, които ще бъдат разгледани по-долу.

### 8.1.Общо (Косо) огъване

Общо огъване (или косо огъване) имаме, когато равнината на огъващия момент в напречното сечение на гредата не съвпада с главните инерционни оси на сечението – фиг.8.1, където равнината на огъващия момент минава през диагонала на правоъгълното сечение на гредата.



Фиг. 8.1. Косо огъване

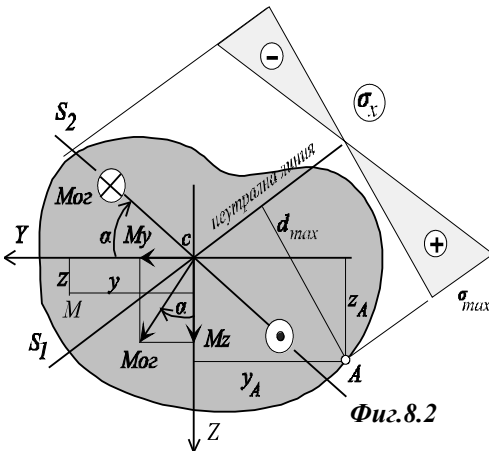
### А) Определяне на напрежението

Ще разгледаме случай на произволно сечение на гредата с известни главни оси на инерция, натоварено с огъващ момент, равнината на който е в общо положение спрямо тях – фиг.8.2.

Нека равнината на  $M_{oz}$  сключва с ос  $Y$  ъгъл  $\alpha$ . Изобразяваме огъващия момент като вектор, перпендикулярен на равнината му на действие. Когато гледаме срещу вектора, огъващият момент трябва

да върти в посока, обратна на посоката на движение на часовата стрелка. Разлагаме вектора  $M_{oz}$  по осите  $Y$  и  $Z$ :

$$M_y = M_{oz} \sin \alpha \quad M_z = M_{oz} \cos \alpha \quad (8.1)$$



Фиг.8.2

Всяко от слагаемите  $M_y$  и  $M_z$  товари сечението на специално огъване и затова напреженията от тях в произволна точка от сечението с координати  $y$  и  $z$  ще се определят по известната формула на Навие:

$$\sigma'_x = \frac{M_y}{J_y} z \quad \sigma''_x = -\frac{M_z}{J_z} y \quad (8.2)$$

Тук напрежението от момента  $M_z$  е отрицателно,

което може да се види от фиг.8.2.

Тъй като двете напрежения са колинеарни, общото напрежение ще бъде алгебричната сума от двете напрежения:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y \quad (8.3)$$

Напрежението сега зависи от две координати, поради което не може директно да се определи в коя точка ще възникне максималното напрежение. Затова най-напред намираме положението на неутралната

линия. Уравнението на неутралната линия получаваме, като приравним  $\sigma_x$  на нула:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y = M_{oc} \left( \frac{\sin \alpha}{J_y} z - \frac{\cos \alpha}{J_z} y \right) = 0$$

От тук намираме уравнението на неутралната линия:

$$z = \left( \frac{J_y}{J_z} \cot g \alpha \right) y \quad (8.8)$$

Това уравнение показва, че неутралната линия при косо огъване минава през центъра на тежестта на сечението.

За да намерим взаимното положение на неутралната линия и равнината на огъващия момент, от фиг.8.2 установяваме, че равнината на пресечницата  $S_2$  на огъващия момент със сечението има вида:

$$z = -tg \alpha \cdot y \quad (8.9)$$

От уравнения 8.8. и 8.9 получаваме, че произведението от ъгловите коефициенти на неутралната линия  $K_1$  и на пресечницата  $S_2 \rightarrow K_2$  ще бъде:

$$K_1 K_2 = - \frac{J_y}{J_z} \quad (8.10)$$

От линейната алгебра е известно, че ако това произведение е равно на минус единица, двете прави са взаимно перпендикулярни. Както се вижда от 8.10, произведението ще е минус единица само тогава, когато двата главни инерционни момента са равни помежду си. В общия случай те не са равни и следователно при косо огъване неутралната линия не е перпендикулярна на равнината на огъващия момент, което имаше място при специално огъване. По-точното изследване показва, че неутралната линия се завъртва спрямо перпендикуляра към равнината на огъващия момент по посока на оста с по-малкия инерционен момент. Същевременно профили, за които инерционните моменти са равни (кръгъл, квадратен) не могат да бъдат подложени на косо огъване.

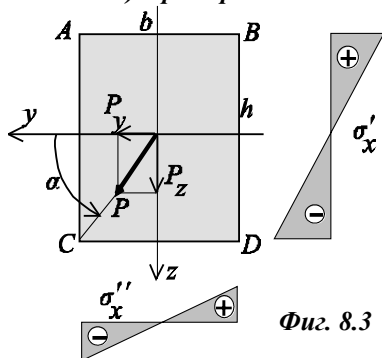
Тъй като напрежението зависи линейно от координатите  $y$  и  $z$ , максималното напрежение ще бъде в точка от профила, която е най-отдалечена от неутралната линия. Ако на фиг.8.2 това е т.А с координати  $Y_A$  и  $Z_A$ , за максималното нормално напрежение в тази точка получаваме:

$$\sigma_{x, \max} = \sigma_{x, A} = \frac{M_y}{J_y} z_A - \frac{M_z}{J_z} y_A \quad (8.11)$$

За начертване на диаграмата на напрежението в сечението това напрежение е достатъчно – фиг.8.2 При сложна форма на напречното

сечение (например турбинна лопатка) е необходимо мащабно графично построяване на напречното сечение и мащабно начертване на неутралната линия с цел точно определяне на максимално отдалечената точка от нея.

**Б) Пример 8.1. Косо огъване на гредата**



Дървена гредка с правоъгълно сечение с размери  $b/h=10/15$  cm и дължина  $l=2$  m е натоварена на косо огъване съгласно фиг.8.1 от сила  $P=2$  kN. Да се определи максималното нормално напрежение в запънатия край на гредата.

Изложената по-горе теория е за случай на сложна форма на напречното сечение. В случай на прости профили можем да решим задачата по-лесно, ако разложим силата по ос y и по ос z, след което определим напреженията във всяка

равнина и накрая на основание принципа на суперпозицията сумираме напреженията от двете сили.

$$\operatorname{tg} \alpha = h/b = 1,5 \rightarrow \alpha = 56,31^\circ$$

$$P_y = P \cos \alpha = 1,11 \text{ kN} \rightarrow |M_z| = P_y l = 1,11 \cdot 2 = 2,22 \text{ kNm}$$

$$P_z = P \sin \alpha = 1,66 \text{ kN} \rightarrow |M_y| = P_z l = 1,66 \cdot 2 = 3,32 \text{ kNm}$$

Всеки от моментите създава в запънатото сечение напрежения, диаграмите на които са показани на фиг.8.3. Максималните стойности на тези напрежения ще бъдат:

$$\sigma'_{x,\max} = \frac{|M_y|}{W_y} = 6 \frac{|M_y|}{bh^2} = 6 \frac{3,32 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 0,15^2} = 8,85 \text{ MPa}$$

$$\sigma''_{x,\max} = \frac{|M_z|}{W_z} = 6 \frac{|M_z|}{hb^2} = 6 \frac{2,22 \cdot 10^3}{0,15 \cdot 0,1^2} = 8,86 \text{ MPa}$$

Максималното опъново напрежение ще бъде в т.В и равно на сумата от двете напрежения, т.е.  $17,71$  MPa. По аналогичен начин можем да определим напреженията в останалите точки от сечението, чрез сумиране на двете напрежения и отчитане на техния знак.

За профили, за които знаем съпротивителните моменти на огъване  $W_y$  и  $W_z$ , максималното напрежение ще бъде равно на :



$$\sigma_{x, \max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \quad (8.12)$$

### В) Определяне на преместването при косо огъване

Постъпваме подобно на разгледаната задача. Разлагаме натоварването по ос  $Y$  и ос  $Z$ , след което определяме преместванията във всяка равнина поотделно по някой от разгледаните методи. Сумарното преместване  $\delta$  ще бъде векторната сума от преместванията по осите  $Y$  и  $Z$ :

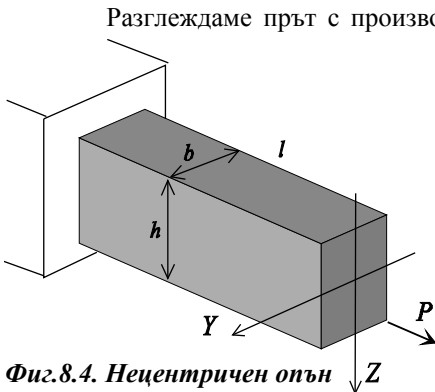
$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2} \quad (8.13)$$

В резултат получаваме, че еластичната линия на гредата ще бъде не равнинна, а пространствена.

## 8.2. Нецентричен опън/натиск. Ядро на сечението.

Нецентричен опън/натиск имаме, когато приложената точка на сила, успоредна на оста на пръта не съвпада с центъра на тежестта на сечението – фиг.8.4. Ще разгледаме случай, когато гредата е корава на огъване.

### А) Определяне на напреженията



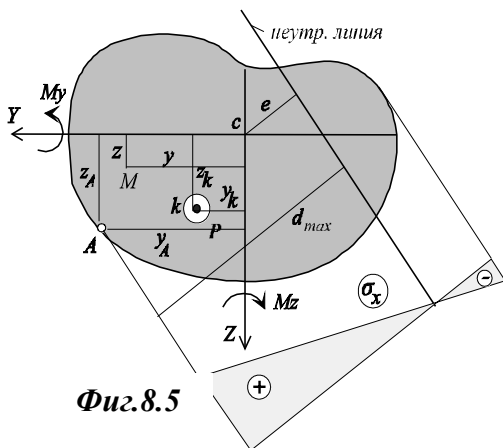
Фиг.8.4. Нецентричен опън

$$\sigma'_x = \frac{N}{F} = \frac{P}{F}; \quad \sigma''_x = \frac{M_y}{J_y} z = \frac{Pz_k}{J_y} z; \quad \sigma'''_x = \frac{M_z}{J_z} y = \frac{Py_k}{J_z} y$$

Сумираме алгебрично получените напрежения и получаваме:

$$\sigma_x = \pm P \left( \frac{1}{F} + \frac{z_k}{J_y} z + \frac{y_k}{J_z} y \right) \quad (8.14)$$

Тук вземаме знак (+), когато силата е опънова и знак (-), когато силата е натискава.



Фиг.8.5

За да определим максималното напрежение, постъпваме както при косо огъване – определяме най-напред положението на неутралната линия. Върху неутралната линия напреженията са равни на нула, което видно от формула 8.14 означава да приравним израза в скобите на нула. Получаваме:

$$\frac{1}{F} + \frac{z_k}{J_y} z + \frac{y_k}{J_z} y = 0 \quad (8.15)$$

Ако положим:

$$\frac{z_k}{J_y} = A; \quad \frac{y_k}{J_z} = B; \quad \frac{1}{F} = C \quad (8.16)$$

тогава уравнението на неутралната линия ще придобие вида:

$$Az + By + C = 0 \quad (8.17)$$

Получихме, че неутралната линия е права, която не минава през центъра на тежестта на сечението ( $C \neq 0$ ), а е отместена от него на някакво разстояние  $e$  – фиг.8.5.

Максималното напрежение ще получим в онази точка от напречното сечение, която е най-отдалечена от неутралната линия. За фиг. 8.5 това е точка А, за която получаваме:

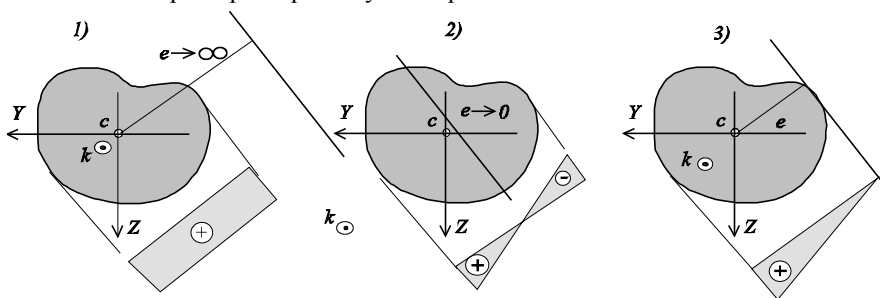
$$\sigma_{x, \max} = \sigma_{x, A} = \pm P \left( \frac{1}{F} + \frac{z_k}{J_y} z_A + \frac{y_k}{J_z} y_A \right) \quad (8.18)$$

### Б) Ядро на сечението

Нека да определим разстоянието  $e$  от центъра на тежестта (центъра на координатната система) до неутралната линия – фиг.8.5. Когато познаваме уравнението на неутралната линия във вида 8.17, това разстояние се определя по израза:

$$e = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\frac{1}{F}}{\sqrt{\left(\frac{z_k}{J_y}\right)^2 + \left(\frac{y_k}{J_z}\right)^2}} \quad (8.19)$$

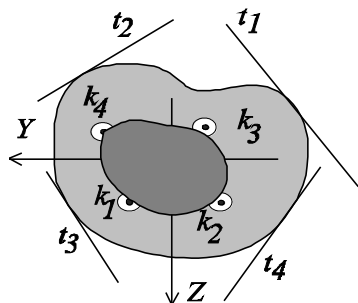
Според значенията на координатите на приложната точка  $Y_k, Z_k$ , възможни са три характерни случая – фиг.8.6:



**Фиг. 8.6. Положение на неутралната линия**

*1 случай:* Координатите  $Y_k, Z_k$  клонят към нула. От 8.19 установяваме, че разстоянието до неутралната линия клони към безкрайност. Нормалното напрежение в цялото сечение е почти константа- случай на централен опън.

*2 случай:* Координатите  $Y_k, Z_k$  клонят към безкрайност (или едната от тях). От 8.19 установяваме, че разстоянието до неутралната линия клони към нула, т.е., неутралната линия се мести към центъра на тежестта. Имаме случай на косо огъване.



**Фиг. 8.7. Ядро на сечението**

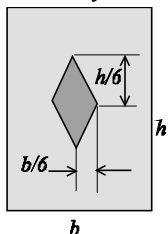
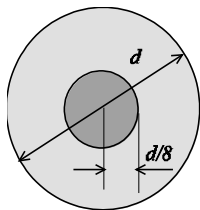
*3 случай:* Координатите  $Y_k, Z_k$  са такива, че неутралната линия е допирателна към контура на сечението.

Ако местим координатите на приложната точка  $Y_k, Z_k$  от различни страни на центъра на тежестта така, че всеки път неутралната линия да е допирателна към контура, приложната точка ще опише около центъра на тежестта област, която ще наречем **ядро на сечението** – фиг.8.7.

Ако приложната точка лежи в тази област, ще сме сигурни, че напреженията в цялото сечение ще имат един и същи знак – знака на силата. Щом приложната точка излезе извън областта, неутралната линия веднага ще пресече сечението и в него ще възникнат както опъновни, така и натискови напрежения, независимо от знака на силата.

Ядрото на сечението има важно значение за материали, които се съпротивляват лошо на опън. В този случай, ако прътът е натоварен на натиск и приложната точка на силата е извън ядрото, в напречното сечение на пръта ще възникнат и опъновни напрежения, които са нежелателни. Затова е важно да знаем положението на ядрото за различните сечения.

Определянето на ядрото става лесно с помощта на формула 8.19. Например за кръгло сечение, предполагайки че приложната точка на силата е на границата на ядрото с координати  $(y_k, 0)$ - фиг.8.8, разстоянието от центъра на тежестта до тангентата към сечението ще бъде  $d/2$ . Заместваме тези стойности в 8.19 и получаваме:



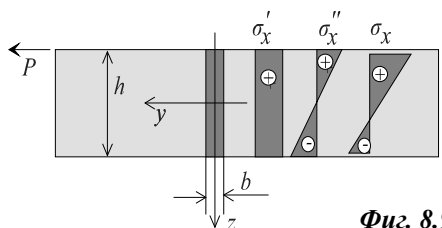
$$\frac{d}{2} = \frac{\frac{4}{\pi d^2}}{\sqrt{0 + \left(\frac{64 y_k}{\pi d^4}\right)^2}} \rightarrow y_k = \frac{d}{8}$$

Фиг. 8.8

На фиг. 8.8 е показано ядрото за кръгло и правоъгълно сечение.

### В) Пример 8.2. Нецентричен опън на планка

Планка с размери на напречното сечение  $b/h = 4/20 \text{ mm}$  се разпъва от две сили  $P$  с големина  $10 \text{ kN}$  – фиг.8.9. Да се определи диаграмата на нормалното напрежение в сечението на планката.



Фиг. 8.9

Имаме случай на нецентричен опън. Спрямо главните оси на инерция силата  $P$  създава +нормална сила  $N=P$  и огъващ момент  $M_y=P.h/2$ . (Ос  $Y$  е перпендикулярна на равнината на чертежа, насочена към нас). Всяко от разрезните усилия ще

създаде следните напрежения:

$$\sigma'_{x'} = \frac{N}{F} = \frac{P}{bh} = \frac{10 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 125 \text{ MPa}$$

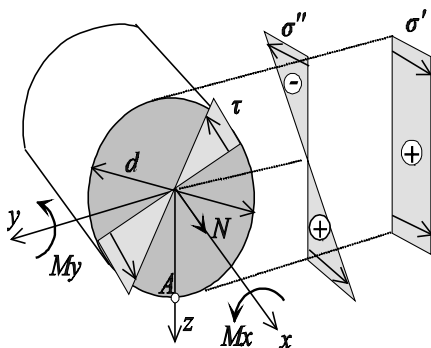
$$\sigma''_{x, \max} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{6Ph}{2bh^2} = \frac{3P}{bh} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 375 \text{ MPa}$$

Сумарните напрежения ще бъдат както следва: В горния ръб:  $125+375=500 \text{ MPa}$ , в долния ръб  $125-375=-250 \text{ MPa}$ .

### 8.3. Огъване с усукване и осова сила на кръгли валове

Усукване с огъване се среща в редуктори, валови линии и др. При зацепване на зъбните колела освен периферната сила, породена от усукващия момент, възниква и радиална сила, която товари вала на огъване. При конични зъбни колела допълнително се поражда и осова сила.

### А) Оразмеряване на вала

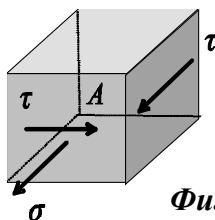


Фиг.8.10

Да предположим, че сме определили разрезните усилия и се оказва, че в определено сечение от вала действа усукващ момент  $M_{yc}=M_x$ , огъващ момент  $M_{ог}=M_y$  и нормална сила  $N$  – фиг.8.10. Намираме напреженията от всяко разрезно усилие поотделно. Диаграмите на разпределението им са показани на фигурата. Максималните стойности на напреженията ще бъдат както следва:

$$\sigma'_{x'} = \frac{N}{F} = \frac{4N}{\pi d^2}; \quad \sigma''_{x, \max} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{32 M_y}{\pi d^3}; \quad \tau_{\max} = \frac{M_{yc}}{W_p} = \frac{16 M_x}{\pi d^3} \quad (8.20)$$

Макар диаграмите на тангенциалното напрежение от усукващия момент и на нормалното напрежение от огъващия момент формално имат един и същи вид, знаем, че тангенциалното напрежение е разпределено по всеки диаметър на вала по показания начин, а нормалното напрежение е разпределено така по ос Z. От тези диаграми определяме т.н. **застрашена точка** – това е точката от напречното сечение, в която комбинацията от всички напрежения е най-неблагоприятна. От фиг.8.10 виждаме, че това е т.А, в която имаме най-голямо нормално напрежение и максимално тангенциално напрежение.



Фиг. 8.11

С равнини, успоредни на координатните оси, около т.А изрязваме елементарен куб и нанасяме получените напрежения по неговите стени – фиг.8.11. Напреженията са:

$$\sigma = \sigma'_{x'} + \sigma''_{x, \max} = \frac{4N}{\pi d^2} + \frac{32M_y}{\pi d^3} \quad \tau = \frac{16M_x}{\pi d^3} \quad (8.21)$$

Полученото напрегнато състояние очевидно е сложно. Преценката за неговата опасност даваме чрез еквивалентното напрежение.

Ако използваме трета якостна теория, на основание на 5.19 получаваме:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{4N}{\pi d^2} + \frac{32M_y}{\pi d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{16M_x}{\pi d^3}\right)^2} \leq [\sigma] \quad (8.22)$$

Ако знаем диаметъра на вала, това уравнение служи за проверка на максималното еквивалентно напрежение. Ако се поставя обаче задача за оразмеряване, т.е. определяне на диаметъра, това уравнение се решава аналитично трудно спрямо диаметъра. В този случай се пренебрегва нормалната сила, тъй като нейния принос в еквивалентното напрежение е много малък. При  $N=0$  уравнение 8.22 се преобразува във вида:

$$\sigma_{екв}^{III} = \frac{32\sqrt{M_y^2 + M_x^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma] \quad (8.33)$$

От тук се определя диаметъра на вала.

Ако вместо трета използваме четвърта якостна теория, получаваме аналогичен израз:

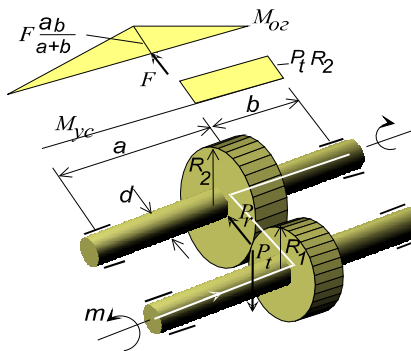
$$\sigma_{екв}^{IV} = \frac{32\sqrt{M_y^2 + 0,75M_x^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma] \quad (8.34)$$

Коренът в последните две формули се нарича **еквивалентен момент**. В зависимост от използваната якостна теория, той се изчислява като:

$$M_{екв}^{III} = \sqrt{M_y^2 + M_x^2} \quad M_{екв}^{IV} = \sqrt{M_y^2 + 0,75M_x^2} \quad (8.35)$$

Ако валът (или гредата) е с друго сечение и е натоварен едновременно на усукване и огъване, принципна разлика в изследването няма – определят се напреженията от усуквания и огъвания момент поотделно, намира се застрашената точка, около нея се изрязва кубче с действащите напрежения и се търси еквивалентното напрежение по подходяща якостна теория.

### Б) Пример 8.3. Оразмеряване на редукторен вал



Фиг. 8.12

На входящия вал на редуктор, въртящ се с 200 об/мин, постъпва мощност 500 к.с. – фиг.8.12. Радиусите на зъбните колела са  $R_1 = 20$  см и  $R_2 = 30$  см. Разстоянията са:  $a = 25$  см,  $b = 15$  см. Да се определи диаметъра на втория вал по трета якостна теория, ако за материала на вала  $[\sigma] = 250$  МПа.

Определяме въртящия момент на входа (виж формула 6.20):

$$m = 9,55 \frac{N}{n} = 9,55 \frac{500 \cdot 0,736}{200} = 17,57 \text{ kNm}$$

Тук с множителя  $0,736$  превръщаме мощността от конски сили в киловати ( $1 \text{ к.с.} = 0,736 \text{ kW}$ ).

В зацепването възникват две сили – тангенциална -  $P_t$  и радиална -  $P_r$ . Тангенциалната сила за двете колела е една и съща и ще бъде:

$$P_t R_1 = m \rightarrow P_t = \frac{m}{R_1} = \frac{17,57}{0,2} = 87,85 \text{ kN}$$

Радиалната сила се приема обикновено 40 % от тангенциалната, така, че  $P_r = 0,4 P_t = 35,14 \text{ kN}$ .

Така вторият вал на участъка след зъбното колело се товари на усукване (виж бялата линия на предаване на усукващия момент) с усукващ момент  $M_{yc} = P_r R_2 = 87,85 \cdot 0,3 = 26,36 \text{ kNm}$  и на огъване от силата

$$F = \sqrt{P_r^2 + P_t^2} = \sqrt{35,14^2 + 87,85^2} = 94,61 \text{ kN}, \quad \text{която създава}$$

максимален огъващ момент в мястото на зъбното колело с големина  $F \cdot ab / (a + b) = 94,61 \cdot 0,25 \cdot 0,15 / 0,4 = 8,84 \text{ kNm}$ . Изчисляваме еквивалентния момент:

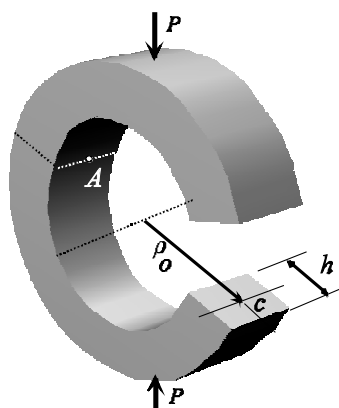
$$M_{екв}^{III} = \sqrt{M_{ог}^2 + M_{yc}^2} = \sqrt{8,84^2 + 26,36^2} = 27,8 \text{ kNm}$$

Диаметърът определяме на основание на формула 8.33:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{екв}^{III}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 27,8 \cdot 10^3}{\pi \cdot 250 \cdot 10^6}} = 0,104 \text{ m}$$

Приемаме  $d = 0,104 \text{ m}$ .

#### 8.4. Огъване на гредата с голяма кривина



Греда с голяма кривина е тази, за която  $h/\rho_0 > 0,2$ , където  $h$  – височина на напречното сечение на гредата,  $\rho_0$  – **радиус на кривина на гредата** - фиг.8.13. Радиусът на кривина се измерва от центъра на кривина до оста на гредата, която съвпада с центровете на тежест на напречното сечение.

Такива греди се срещат в звената на корабни вериги, кранови куки, в детайли с отвори и др.

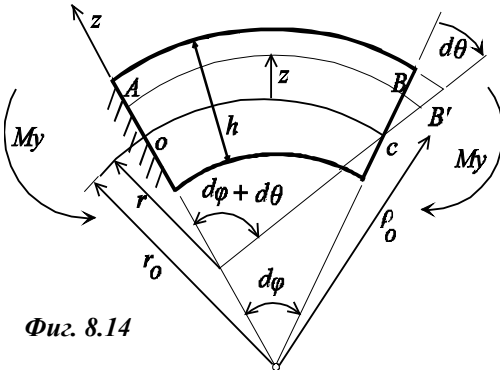
##### А) Определяне на напреженията

Ще разгледаме елемент от гредата със сектор  $d\varphi$ , натоварена на чисто специално огъване.

Приемаме, че е в сила хипотезата на **Бернули**, съгласно която при огъване напречните сечения на гредата остават равнинни – фиг.8.14. Ако едното сечение на елемента приемем за неподвижно, другото се завъртва около ос,

перпендикулярна на равнината на гредата, на ъгъл  $d\theta$ . Слой от гредата с

радиус на кривина  $r_0$  остава недеформиран. Този слой наричаме **неутрален** и съответния радиус на кривина – **радиус на кривина на неутралния слой**. След завъртането на дясното сечение този слой получава текущ радиус на кривина  $r$ . Приемаме ос  $Z$  да има начало – неутралния слой, насочена от центъра на кривина навън (реперната линия е от



Фиг. 8.14

външната страна на гредата). Тогава огъващият момент  $M_y$  ще е положителен, ако разпъва реперната линия. Разглеждаме нишката  $AB$ , отстояща на разстояние  $Z$  от неутралния слой. След деформирането си, тази нишка ще получи следната деформация:

$$\varepsilon_x = \frac{BB'}{AB} = \frac{zd\theta}{(r_0 + z)d\phi} = \frac{z}{r_0 + z} \frac{d\theta}{d\phi} \quad (8.36)$$

Неутралния слой има дължина:

$$\begin{aligned} OC &= r_0 d\phi = r(d\phi + d\theta) \rightarrow \\ (r_0 - r)d\phi &= rd\theta \rightarrow \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{r_0 - r}{r} \end{aligned} \quad (8.37)$$

Заместваме 8.37 в 8.36 и на основание закона на Хук, получаваме:

$$\varepsilon_x = \frac{z}{r_0 + z} \frac{r_0 - r}{r} \rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{Ez}{r_0 + z} \frac{r_0 - r}{r} \quad (8.38)$$

В този израз не познаваме все още  $r_0$  и  $r$ . За целта от условието, че нормалната сила е равна на нула, получаваме:

$$N = \int_F \sigma_x dF = E \frac{r_0 - r}{r} \int_F \frac{z}{r_0 + z} dF = 0 \rightarrow \int_F \frac{z}{r_0 + z} dF = 0 \quad (8.39)$$

Тук  $F$  е напречното сечение на гредата. От това условие може да се определи  $r_0$ , което ще направим по-късно.

Изразяваме огъващия момент чрез напрежението:

$$M_y = \int_F \sigma_x z dF = E \frac{r_0 - r}{r} \int_F \frac{z^2}{r_0 + z} dF \quad (8.40)$$



Решаваме интеграла, като използваме условие 8.39:

$$\int_F \frac{z^2}{r_0 + z} dF = \int_F \frac{(z^2 + r_0 z) - r_0 z}{r_0 + z} dF = \int_F z dF - r_0 \int_F \frac{z}{r_0 + z} dF = S_y \quad (8.41)$$

Тук  $S_y$  е статичния момент на напречното сечение на гредата относно ос  $Y$ . Тъй като ос  $Y$  е на разстояние  $e$  от центъра на тежестта на сечението (фиг.8.14, 8.15), статичният момент можем да определим като  $S_y = F \cdot e$ . Тогава от 8.41 и 8.40 следва:

$$M_y = \int_F \sigma_x z dF = E \frac{r_0 - r}{r} S_y = E \frac{r_0 - r}{r} F e \rightarrow \frac{r_0 - r}{r} = \frac{M_y}{E F e} \quad (8.42)$$

Заместваме 8.42 в 8.38 и за напрежението получаваме окончателно:

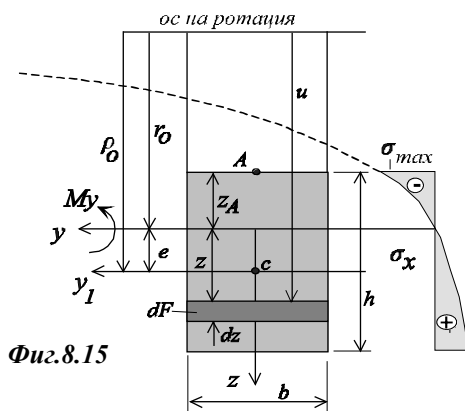
$$\sigma_x = \frac{M_y}{F e} \frac{z}{r_0 + z} \quad (8.43)$$

От фиг.8.14 се вижда следната връзка:

$$e = \rho_0 - r_0 \quad (8.44)$$

Тук  $\rho_0$  е по условие известно. По такъв начин за определяне на напрежението остава неизвестен само радиусът на кривина  $r_0$  на неутралния пласт.

Формула 8.43 показва, че напрежението зависи нелинейно от текущата координата  $z$ . Графиката на напрежението в напречното сечение на гредата е показана на фиг.8.15. Видът на тази графика не зависи от формата на сечението. При  $z = -r_0$  графиката на напрежението (хипербола) асимптотично се доближава до



Фиг.8.15

оста на ротация. Максималното напрежение от огъващия момент се получава във вътрешния слой на гредата (т.А) и ще се определи по израза:

$$\sigma_{x, \max} = \frac{M_y}{F e} \frac{z_A}{r_0 + z_A} \quad (8.45)$$

### Б) Определяне радиуса на кривина на неутралния пласт

За целта използваме условие 8.39, където правим следната субституция:

$$u = r_0 + z \rightarrow z = u - r_0 \rightarrow \int_F \frac{z}{r_0 + z} dF = \int_F \frac{u - r_0}{u} dF = \int_F dF - r_0 \int_F \frac{dF}{u} = 0$$

От тук определяме:

$$r_0 = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{u}} \quad (8.46)$$

Така например за правоъгълното сечение от фиг.8.15 имаме :

$$F = bh \quad dF = bdz = bdu \quad \int_F \frac{dF}{u} = \int_{\rho_{0^-} h/2}^{\rho_{0^+} h/2} \frac{bdu}{u} = b \ln u \Big|_{\rho_{0^-} h/2}^{\rho_{0^+} h/2} = b \ln \frac{\rho_{0^+} h/2}{\rho_{0^-} h/2}$$

Заместваме в 8.46 и получаваме:

$$r_0 = \frac{h}{\ln \frac{\rho_{0^+} h/2}{\rho_{0^-} h/2}} \quad (8.47)$$

За кръгло сечение с радиус  $R$  е получен следния израз за радиуса на кривина на неутралната линия [30]:

$$r_0 = \frac{1}{2} \left( \rho_{0^+} \sqrt{\rho_{0^-}^2 - R^2} \right) \quad (8.48)$$

При сложна форма на напречното сечение интеграла в знаменателя на 8.46 се определя числено. Може да се използва и следната приблизителна формула за отместването 'e' на неутралната линия – [1]:

$$e \approx \frac{J_{y1}}{\rho_{0^-} F} \quad (8.49)$$

където  $J_{y1}$  – инерционен момент спрямо главната ос  $y_1$  – фиг.8.15. Радиусът на кривина на неутралната линия се определя чрез 8.44. Отместването 'e' следва да се изчислява поне с три знака, защото е малко число и видно от 8.43, силно влияе на напреженията

#### **Б) Пример 8.4. Анализ на напреженията в греда с голяма кривина**

Срязан пръстен с радиус на кривина  $\rho_0 = 5$  см и правоъгълно сечение  $b/h = 2/3$  cm е натоварено както е показано на фиг.8.13 със сила  $P = 5$  kN. Да се определи максималното нормално напрежение в пръстена.

В случая  $h/\rho_0 = 3/5 = 0,6 > 0,2$  и следователно имаме греда с голяма кривина.

При даденото натоварване пръстенът ще изпита максимален огъващ момент в сечението, отбелязано с пунктир. Този момент ще бъде

положителен (реперната линия, която е от външната страна на пръстена, се разпъва) и равен на:

$$M_y = P \rho_0 = 5.10^3 \cdot 0,05 = 250 \text{ Nm}$$

Радиусът на кривина и изместването на неутралната линия ще определим по формули 8.37 и 8.44:

$$r_0 = \frac{h}{\ln \frac{\rho_0 + h/2}{\rho_0 - h/2}} = \frac{3}{\ln \frac{6,5}{3,5}} = 4,846 \text{ cm} \rightarrow e = \rho_0 - r_0 = 5 - 4,846 = 0,1538 \text{ cm}$$

Максималното нормално напрежение от огъващия момент ще възникне в т.А (показана на фиг.8.13), която има координата  $Z_A = -(h/2-e) = -(1,5-0,1538) = -1,346 \text{ cm}$  (виж фиг.8.15). Това напрежение ще определим по формула 8.45:

$$\sigma_{x,\max}^M = \frac{M_y}{Fe} \frac{z_A}{r_0 + z_A} = \frac{250}{6 \cdot 10^{-4} \cdot 0,1538 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{-1,346}{4,846 - 1,346} = -104,2 \text{ MPa}$$

За сравнение, ако използваме формулата за максималното натисково напрежение за права греда при нейното огъване, ще получим:

$$\sigma_{\max}^M = -\frac{M_y}{W_y} = -\frac{6M_y}{bh^2} = -\frac{6 \cdot 250}{2,9 \cdot 10^{-6}} = -83,33 \text{ MPa}$$

което е с 20 % по-ниско от действителното.

Освен огъващ момент, изследваното сечение изпитва и отрицателна нормална сила, напрежението от която ще бъде:

$$\sigma_x^N = \frac{N}{F} = \frac{-5 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = -8,33 \text{ MPa}$$

Това напрежение се разпределя равномерно по цялото сечение.

Максималното напрежение очевидно ще бъде в т.А и ще получим чрез сумиране на двете напрежения:

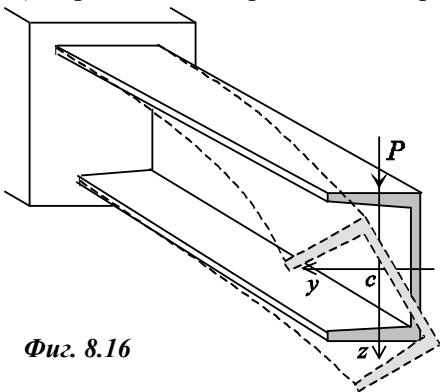
$$\sigma_{x,\max} = \sigma_{x,A} = -104,2 - 8,33 = -112,53 \text{ MPa}$$

### 8.5. Огъване на тънкостенни профили. Център на огъване.

Огъването на греди от тънкостенни профили, подобно на усукването, е съпроводено с някои нови ефекти, които липсват или се проявяват много слабо при пълностенните профили. Така например конзолно закрепена греда от П-образен профил, натоварена на напречно специално огъване от сила, минаваща обикновено през центъра на тежестта, както е показано на фиг.8.16, освен че се огъва, се усуква.

Картината на напреженията не може да се получи само с формулите за огъване на пълностенните профили, защото освен огъване в допълнение получаваме стеснено усукване, от което както знаем от раздел 6.5, се пораждат допълнителни нормални и тангенциални напрежения.

**А) Определяне на нормалните напрежения от огъващите моменти.**



Фиг. 8.16

Тези напрежения се определят както при пълностенните профили:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y \quad (8.50)$$

**Б) Определяне на тангенциалните напрежения от срязващите сили**

Тези напрежения определяме подобно на напреженията на срязване по формулата на Журавски. За елемент от тънкостенния профил ще е в сила картината на усилията,

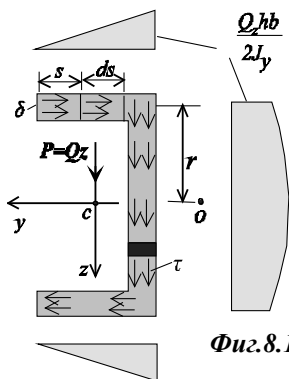
показана на фиг. 6.17, където получихме:

$$\tau = \frac{1}{\delta} \int_{F^*} \frac{d\sigma_x}{dx} dF \quad (8.51)$$

При напречно специално огъване, заместваме 8.50 в 8.51:

$$\tau_{(Q_z)} = \frac{1}{\delta} \int_{F^*} \frac{d\sigma_x}{dx} dF = \frac{1}{\delta} \int_{F^*} \frac{d}{dx} \left( \frac{M_y}{J_y} z \right) dF = \frac{Q_z}{J_y \delta} \int_{F^*} z dF = \frac{Q_z S_y^*}{J_y \delta} \quad (8.52)$$

Тук  $S_y^*$ - статичния момент на отрязаната част от сечението на тънкостенния профил спрямо ос  $Y$ . Ще напомним, че както при извода на формулата на Журавски, така и тук, тангенциалните напрежения са равномерно разпределени по дебелината на профила – фиг.6.17. Допълнително считаме, че напреженията са насочени допирателно към средния контур.



Фиг.8.17

За показания профил статичният момент  $S_y^*$  и напрежението в пояса ще бъдат:

$$S_y^* = \delta s \frac{h}{2} \rightarrow \tau_{(Q_z)} = \frac{Q_z h}{2 J_y} s$$

Максималното напрежение ще получим върху ос  $Y$ , където статичният момент  $S_y^*$  ще бъде максимален – фиг.8.17.

По подобен начин се пресмята напрежението от срязващата сила  $Q_y$ :

$$\tau_{(Qy)} = \frac{Q_y S_z^*}{J_z \delta} \quad (8.53)$$

### В) Център на усукването и център на огъването

В раздел 6.5 видяхме, че центърът на усукване (т.О) за П-образния профил лежи на ос  $Y$ , отклонен надясно от стъблото на профила – фиг.8.17. Щепомним, че центърът на усукване е точка от равнината на профила, около която става усукването и се определят усукващите моменти от външните сили. Ако външната сила минава през центъра на тежестта, тя създава около центъра на усукване на профила усукващ момент, равен на произведението на силата  $P$  и рамото  $CO$  – ( $M_{ус} = P \cdot CO$ ). Тази е причината, поради която гредата се усуква по показаната посока – фиг.8.16, в случая, обратна на посоката на движение на часовата стрелка

Тъй като депланацията на профила е ограничена, ще възникне стеснено усукване. Следователно ще се породят нормални напрежения вследствие променливата депланация и два вида тангенциални напрежения – основни и допълнителни. Тези напрежения бяха подробно дискутирани в раздел 6.5 и решения пример 6.4. За да бъдат определени, трябва да бъде решено диференциалното уравнение на стесненото усукване 6.48.

С други думи, тангенциалните напрежения на фиг.8.17, породени от срязващата сила, не са единствени. Това се вижда и от факта, че сумата от моментите на вътрешните сили (тангенциалните напрежения от срязващата сила) и външната сила  $P$  спрямо центъра на тежестта е различна от нула. Като значи, че в този вид системата от външни и вътрешни сили не е в равновесие

Нека да определим момента от тангенциалните напрежения от срязващата сила  $Qz$  спрямо произволен полюс  $O$ :

$$M_o = - \int_F \tau_{(Qz)} \delta r ds = - \int_F \tau_{(Qz)} \delta d\omega = - \int_F \frac{Q_z S_y^*}{J_y} d\omega = - \frac{Q_z}{J_y} \int_F S_y^* d\omega \quad (8.54)$$

Решаваме интеграла в 8.54 по части:

$$\int_F S_y^* d\omega = \omega S_y^* \Big|_{\tau.1}^{\tau.2} - \int_F \omega dS_y^* \quad (8.55)$$

Тук статичният момент в краищата на профила (т.1 и т.2 – фиг.8.17) е винаги нула. Като вземем предвид, че:

$$S_y^* = \int_{F^*} z dF \rightarrow dS_y^* = z dF \rightarrow \int_F S_y^* d\omega = - \int_F \omega dS_y^* = - \int_F \omega z dF \quad (8.55)$$

Заместваме 8.55 в 8.54 и за момента получаваме:

$$M_o = \frac{Q_z}{J_y} \int_F \omega z dF \quad (8.56)$$

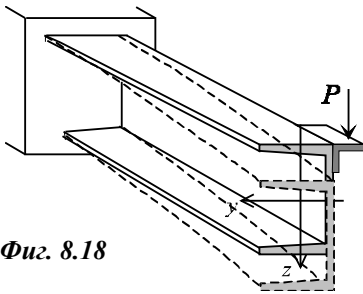
Аналогично, ако действа срязваща сила  $Q_y$ , моментът ще бъде:

$$M_o = \frac{Q_y}{J_z} \int_F \omega y dF \quad (8.57)$$

За да бъде моментът от вътрешните срязващи сили равен на нула, от 8.56 и 8.57 се вижда, че е необходимо да се изпълнят условията:

$$\int_F \omega y dF = 0 \quad \int_F \omega z dF = 0 \quad (8.58)$$

Но това са условията за определяне на центъра на усукване и центъра на огъване (виж 2.45 и 6.37).

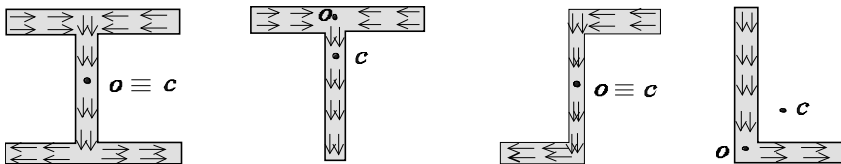


Фиг. 8.18

Вече можем да дадем определение за **центъра на огъване** – това е точка от равнината на профила, спрямо която моментът от тангенциалните напрежения от срязващите сили е равен на нула.

Какво ще стане, ако приложим външната сила  $P$  в центъра на огъване? Тогава моментът и спрямо тази точка ще е също равен на нула и следователно системата от външни и вътрешни сили,

показани на фиг.8.17 ще бъде в равновесие., т.е, в този случай картината от напрежения, показани на фиг.8.17 ще е единствена. В този случай гредата няма да се усуче, защото и усукващият момент спрямо центъра на усукване, съвпадащ с центъра на огъване ще е равен на нула. На практика силата  $P$  може да мине през центъра на огъване (усукване) с помощта на просто приспособление – фиг.8.18. Както е показано, в този случай гредата ще провисне без да се усуче.



Фиг. 8.19. Център на огъване (г.О) на някои профили

Като използваме по-горното определение за центъра на огъване, можем лесно (без изчисления) да го определим за няколко стандартни профила – фиг.8.19, където са показани положението на центъра на огъване,

на центъра на тежестта и посоките на тангенциалните напрежения от срязващата сила  $Q_z$ . Вижда се, че моментът от тангенциалните напрежения спрямо т.О е равен на нула. Вижда се също, че за някои профили центърът на огъване съвпада с центъра на тежестта.

### 8.6. Общ случай на натоварване на тънкостенни пръти

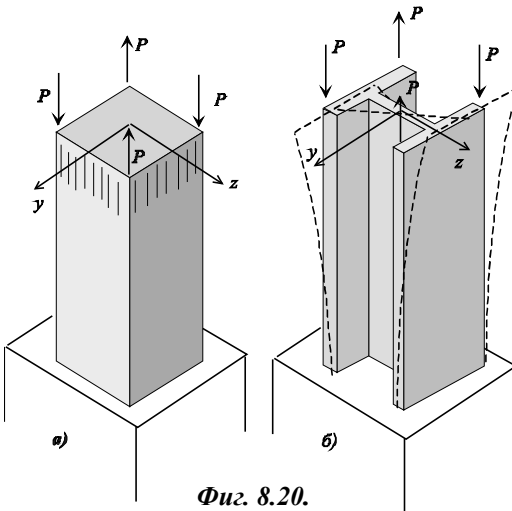
#### А) Определяне на напреженията

От предишния раздел видяхме, че при огъването на греди от тънкостенните профили могат да възникнат три вида нормални напрежения – две от огъващите моменти  $M_y$  и  $M_z$  (формула 8.3) и едно от променливата деформация (или от бимомента – виж 6.40). Ако действа и нормална сила, се добавя още едно напрежение. Понеже всички те са колинеарни (успоредни на ос  $X$ ), можем да ги сумираме алгебрически:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y + \frac{B}{J\omega} \omega \quad (8.59)$$

Подобно е положението с тангенциалните напрежения. Могат да се породят напрежения от срязващите сили  $Q_y$  и  $Q_z$  (формули 8.52 и 8.53). Ако се получава стеснено усукване, се пораждат още основни и допълнителни тангенциални напрежения от усукването ( формули 6.26 и 6.50). Тъй като всички тези напрежения действуват допирателно към средния контур, можем също да ги сумираме алгебрически:

$$\tau = \frac{Q_z S_y^*}{J_y \delta} + \frac{Q_y S_z^*}{J_z \delta} + \frac{M_1}{J_p} \delta - \frac{M_2 S_\omega^*}{J_\omega \delta} \quad (8.60)$$



Фиг. 8.20.

#### Б) Тънкостенен прът под действие на осови сили

Ако натоварим прът с правоъгълно пълностенно напречно сечение с четири сили по схемата на фиг.8.20-а, може да се види, че всички разрезни усилия са равни на нула. Като изключим малка част от пръта в мястото на прилагане на силите, напреженията в останалата част ще бъдат равни на нула.

Не така стои тази задача, ако прътът е тънкостенен – фиг.8.20-б

Поради слабата връзка между поясите, двата пояса ще се огънат в различни посоки, както е показано на фигурата, при което прътът в допълнение ще се усуче. Макар, че разрезните усилия  $N$ ,  $M_y$  и  $M_z$  са също нула, сега напреженията по цялата дължина на пръта ще са различни от нула. Може да се каже, че в този случай принципът на **Сен Венан** е неприложим. Всяка промяна на системата сили в горния край на пръта с друга, еквивалентна на нея, ще доведе до промяна на напрегнатото състояние по протежение на целия прът.

Определянето на нормалните напрежения в случая на фиг.8.20-б ще извършим съгласно 8.59, където от всички разрезни усилия само бимоментът е различен от нула. Тангенциалните напрежения се определят съгласно 8.60, където от всички разрезни усилия, различни от нула са усукващите моменти  $M_1$  и  $M_2$ . Всички вътрешни усилия  $B$ ,  $M_1$  и  $M_2$  могат да се определят само след решение на диференциалното уравнение на стесеното усукване на пръта (уравнение 6.48) с дясна част, равна на нула. При решението на това диференциалното уравнение ще обърнем внимание на граничното условие в края на пръта.

Вътрешният бимомент беше определен на основание на 6.38 като:

$$B = \int_F \sigma \omega \, dF \quad (8.61)$$

В края на пръта този бимомент е известен. На основание на 8.61 той ще бъде:

$$B = \int_F \sigma \omega \, dF = \int_F (\sigma \, dF) \omega = \sum_{i=1..N} P_i \omega_i \quad (8.62)$$

Тук  $N$  – брой на точките, в които са приложени осови сили (например за фиг.8.20 -  $N=4$ ),  $\omega_i$  – значение на главната секторна площ в приложната точка на силата.

От друга страна от 6.39 е известно, че:

$$B = EJ_\omega \frac{d\theta}{dx} \quad (8.63)$$

От сравнението на 8.62 и 8.63 следва, че в свободния край следва да се изпълнява следното гранично условие:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=l} = \frac{B}{EJ_\omega} = \frac{\sum_{i=1..N} P_i \omega_i}{EJ_\omega} \quad (8.64)$$

### **В) Пример 8.5. Опън на тънкостенен прът**

Тънкостенен прът от П-образен профил N20 с дължина  $l=1$  m е натоварен на опън съгласно фиг.8.21 от сила с големина  $P=20$  kN. Да се



определи максималното нормално напрежение в пръта от бимоента, ако геометричните и секторни характеристики на профила са:  $F=23,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $J_y=1530 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ ,  $J_z=134 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ ,  $J_\omega=86,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}^6$

Решението на диференциалното уравнение на стесеното усукване при дясна част нула има вида:

Общото решение ще има вида:

$$\theta = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x$$

Тук коефициентът  $\alpha = 1,442$  беше определен в пример 6.4 (за същия профил). Граничните условия за определяне на константите са:

1. При  $x=0 \rightarrow \theta = 0$ . От тук определяме, че  $C_2 = 0$ .

При  $x=l$  е в сила граничното условие 8.63:

$$\theta'_{(l)} = C_1 \alpha \operatorname{ch} \alpha l = \frac{P \omega_k}{E J_\omega} \rightarrow C_1 = \frac{1}{\alpha \operatorname{ch} \alpha l} \frac{P \omega_k}{E J_\omega}$$

Така за относителния ъгъл на усукване получаваме:

$$\theta = \frac{P \omega_k}{E J_\omega} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\alpha \operatorname{ch} \alpha l} \rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{P \omega_k}{E J_\omega} \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha l}$$

На основание на 8.63 бимоментът ще бъде максимален в запъването и равен на:

$$B_{\max} = E J_\omega \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = \frac{P \omega_k}{\operatorname{ch} \alpha l} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot (-0,00277)}{\operatorname{ch}(1,442)} = -24,81 \text{ Nm}^2$$

Тук главната секторна площ в точка  $K$  е  $\omega_k = -0,00277 \text{ m}^2$  (виж пример 2.2).

Максималното нормално напрежение от бимоента ще се разпредели както диаграмата на главната секторна площ – виж фиг.6.13. Максималните стойности ще получим в точките А и В, като в т.А ще е положително, а в т.В – отрицателно.

$$\sigma_{\omega, \max} = \frac{B}{J_\omega} \omega = \pm \frac{24,81}{86,6 \cdot 10^{-10}} 0,0041 = \pm 11,75 \text{ MPa}$$

За получаване на пълната картина на нормалното напрежение следва да се изчислят напреженията от нормалната сила  $N$  и двата огъващи момента  $M_y$  и  $M_z$ , което се извършва по същия начин, както за пълностенните профили.