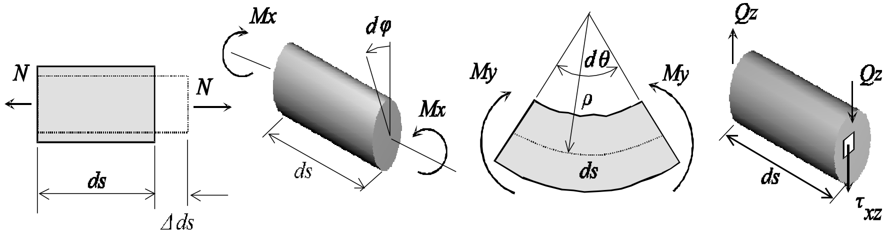
ГЛ. 9. ЕНЕРГЕТИЧНИ МЕТОДИ ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ПРЕМЕСТВАНИЯ

В гл.7 разгледахме два метода за определяне на премествания на греди – опростеното диференциално уравнение и универсалното уравнение на еластичната линия. Неудобството на тези методи е, че са свързани с неизвестни интеграционни константи, за които се съставя съответна система алгебрични уравнения. Съществуват методи за решаване на този проблем директно, само на основание на диаграмите на вътрешните усилия. Тези методи са известни като **енергетични**, тъй като използват енергията на деформация на натовареното тяло.

9.1. Потенциална енергия на деформацията при сложно натоварване

Нека елемент от греда (или рамка) с дължина *ds* е натоварен с шестте разрезни усилия: *N, Mx, My, Mz, Qy* и *Qz* – фиг.9.1. Най-напред ще определим енергията на деформация от всяко усилие поотделно.



Фиг.9.1

За тази цел ще използваме теоремата на **Клапейрон**, при което ще считаме, че работата, която извършва всяко разрезно усилие се превръща изцяло, без загуби, в потенциална енергия на деформация.

За елемента на фиг.9.1 –а, натоварен на опън, можем да запишем:

$$dA_{(N)} = dU_{(N)} = \frac{1}{2}N.\Delta\, ds = \frac{1}{2}N\frac{Nds}{EF} = \frac{N^2}{2EF}ds \qquad (9.1)$$

За елемента на фиг.9.1 – б, натоварен на усукване, ще получим:

$$dA_{(Mx)} = dU_{(Mx)} = \frac{1}{2}M_x.d\varphi = \frac{1}{2}M_x\frac{M_x ds}{GJ_p} = \frac{M_x^2}{2GJ_p}ds \qquad (9.2)$$

За елемента на фиг.9.1-в, натоварен на огъване, получаваме:

$$dA_{(My)} = dU_{(My)} = \frac{1}{2}M_y.d\theta = \frac{1}{2}M_y\frac{ds}{\rho} = \frac{1}{2}M_y\frac{M_y}{EJ_y}ds = \frac{M_y^2}{2EJ_y}ds \qquad (9.3)$$

Тук са използувани известните зависимости от предидущите глави за деформацията на елемента при опън - 3.13, при усукване – 6.15 и при огъване – 7.4.

По аналогия, изразът за потенциалната енергия на деформация на елемента от огъващия момент *Mz* ще получим , като в последната формула 9.3 сменим индекса *y* на *z:*

$$dA_{(Mz)} = dU_{(Mz)} = \frac{M_z^2}{2EJ_z} ds \tag{9.4}$$

За да получим енергията на деформацията от срязващата сила Qz – фиг.9.1-г, ще използуваме изведения израз за специфичната потенциална енергия 4.64, където от всички напрежения, ще остане да действува само напрежението $\tau_{xz.}$ Получаваме:

$$U_0 = \frac{\tau_{xz}^2}{2G} \tag{9.5}$$

За получаване на пълната потенциална енергия на елемента ще интегрираме по обема на елемента *(dV=ds.dF),* при което за тангенциалното напрежение ще използуваме известната формула на **Журавски**:

$$dU_{Qz} = \int_V U_0 dv = ds\int_F \frac{\tau_{xz}^2}{2G} dF = ds\int_F \frac{1}{2G}\left(\frac{Q_z S_y^*}{J_y b_{(z)}}\right)^2 dF =$$

$$= \frac{Q_z^2 ds}{2GF}.\frac{F}{J_y^2}\int_F \left(\frac{S_y^*}{b_{(z)}}\right)^2 dF = k_z \frac{Q_z^2}{2GF} ds \tag{9.6}$$

където с k_z сме положили:

$$k_z = \frac{F}{J_y^2}\int_F \left(\frac{S_y^*}{b_{(z)}}\right)^2 dF \quad [-] \tag{9.7}$$

Може да се види, че така определен, коефициентът k_z е безразмерен и зависи само от формата на сечението. Ако се заместят съответните изрази за площта, инерционните и статични моменти за различни сечения, получаваме, че за правоъгълно сечение k_z=6/5, за кръгло сечение k_z=10/9 и за тънкостенни профили k_z=2.

По аналогичен начин се определя приноса към потенциалната енергия от срязващата сила *Qy.* Крайният израз ще получим, като в 9.6 сменим индекса *z* с *y*. При това коефициентът $k_y=k_z$

$$dU_{Qy} = k_y \frac{Q_y^2}{2GF} ds \tag{9.8}$$

Потенциалната енергия за елемента от всичките разрезни усилия ще получим чрез сумиране на всички приноси:

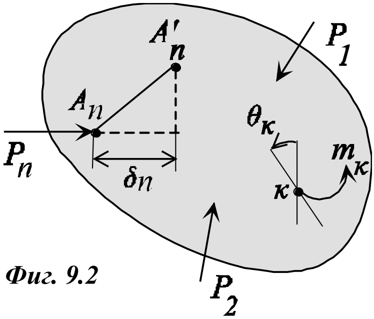
$$dU = \frac{N^2}{2EF}ds + \frac{M_x^2}{2GJ_p}ds + \frac{M_y^2}{2EJ_y}ds + \frac{M_z^2}{2EJ_z}ds + k_y\frac{Q_y^2}{2GF}ds + k_z\frac{Q_z^2}{2GF}ds \tag{9.9}$$

За цялата греда (или рамка) пълната потенциална енергия ще получим след интегриране на 9.9 по цялата дължина (по всички участъци):

$$U = \int_l \frac{N^2}{2EF}ds + \int_l \frac{M_x^2}{2GJ_p}ds + \int_l \frac{M_y^2}{2EJ_y}ds + \int_l \frac{M_z^2}{2EJ_z}ds + k_y\int_l \frac{Q_y^2}{2GF}ds + k_z\int_l \frac{Q_z^2}{2GF}ds \tag{9.10}$$

Трябва да подчертаем, че тежестта на отделните интеграли в общата потенциална енергия е различна. Интегралите с моментите дават основния принос, затова те винаги се отчитат. Интегралите със срязващите сили в повечето случаи имат значително по-малък принос, в което ще се убедим малко по-късно. Интегралът с нормалната сила се отчита задължително само при фермите.

9.2. Теорема на Кастиляно



Фиг. 9.2

Разглеждаме произволно еластично деформируемо тяло под действието на произволна система от сили, намираща се в равновесие. Под действието на тези сили точка A_n , в която действува силата P_n, се премества в положение A_n'. Векторът $\boldsymbol{A_nA_n'}$ ще бъде **пълното преместване** на точка A_n. Проекцията на пълното преместване върху направлението на силата P_n бележим с δ_n и наричаме **проектирано преместване**. Съгласно теоремата на **Кастиляно**, доказана от него през 1875 г., имаме:

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} \tag{9.11}$$

където U – пълната потенциална енергия на деформация на тялото от действието на всички сили.

Доказателството на тази теорема ще извършим, като разгледаме две енергетични състояния на тялото. При първото енергетично състояние прилагаме всички сили, след което даваме малко нарастване на силата - dP_n и определяме сумарната потенциална енергия на тялото. Ако енергията от всички сили е U, то след нарастване на силата $P_{n,}$ в края на първото енергетично състояние енергията ще бъде:

$$U_I = U + dU = U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n \tag{9.12}$$

Тук при изчисляване на диференциала dU сме взели предвид, че енергията зависи от повече от една сила.

При второто енергетично състояние разменяме реда на прилагане на силите и отново търсим сумарната енергия на деформация.

При прилагане само на силата dP_n, на основание теоремата на Клапейрон, енергията ще бъде:

$$U'_{II} = \frac{1}{2} dP_n d\delta_n \tag{9.13}$$

Сега прилагаме всички сили и изчисляваме сумарната енергия:

$$U_{II} = \frac{1}{2} dP_n d\delta_n + U + dP_n \delta_n \tag{9.14}$$

Тук е много важно да се разбере смисъла на последното събираемо. Силата dP_n, приложена преди това, действува с максималната си стойност и нейната приложна точка се премества под действието на всички сили от положение A_n в положение A_n'. Работата на силата dP_n ще изчислим без коефициент ½, защото на този етап тя е с постоянна големина.

Тъй като в края на първото и второто енергетично състояние товарите са едни и същи, приравняваме енергиите, получени от тях:

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n = \frac{1}{2} dP_n d\delta_n + U + dP_n \delta_n \tag{9.15}$$

В това уравнение събираемото отдясно $dP_n\, d\delta_n /2$ е произведение от два диференциала (докато останалите не са) и следователно то може да бъде пренебрегнато. След опростяване на израза, получаваме формула 9.11, изразяваща теоремата на Кастиляно, която гласи:

Проектираното преместване на точка от едно еластично, линейно деформируемо тяло, натоварено с уравновесена система от сили е равно на частната производна на пълната потенциална енергия на тялото по отношение на силата, действуваща в тази точка.

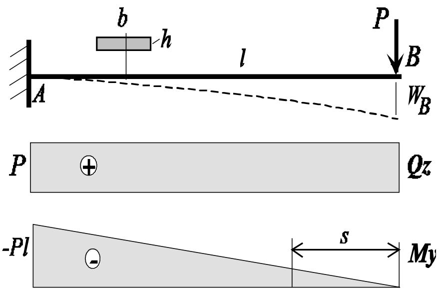
На силата и преместването в 9.11 може да се гледа в обобщен смисъл, т.е. ако вместо по силата диференцираме енергията по известен момент m, действуващ в определена точка от тялото – фиг.9.2, ще получим проектираното завъртване на отсечка, прекарана през тази точка.

$$\theta_k = \frac{\partial U}{\partial m_k} \tag{9.16}$$

Под '**проектирано завъртване**' разбираме завъртването на отсечката в равнината на действие на момента *m*.

При извода на теоремата на Кастиляно не сме уточнявали, какво е тялото. Следователно тя е валидни за всички видове тела – греди, рамки, ферми, черупки, плочи и масивни тела. Изисква се само материалът на тялото да се подчинява на закона на Хук.

Теоремата на Кастиляно е база за други енергетичните методи, които ще разгледаме по-нататък



Фиг. 9.3

Пример 9.1. Да се определи преместването на т.B на конзолната греда, показана на фиг.9.3, като се вземе под внимание и влиянието на срязващите сили.

Тази задача беше решена с опростеното диференциално уравнение на еластичната линия (виж пример 7.2), където беше отчетено влиянието само на огъващия момент.

Теоремата на Кастиляно изисква познаването на пълната потенциална енергия на гредата от зададеното натоварване. За да отчетем влиянието на срязващите сили, на основание на 9.10, освен интеграла с огъващия момент, ще отчетем и интеграла със срязващата сила:

$$U = \int_l \frac{M_y^2}{2EJ_y} ds + k_z \int_l \frac{Q_z^2}{2GF} ds = \frac{1}{2EJ_y} \int_0^l (-Ps)^2 ds + \frac{k_z}{2GF} \int_0^l P^2 ds = \frac{P^2 l^3}{6EJ_y} + k_z \frac{P^2 l}{2GF}$$

Преместването на т.B по направлението на силата (проектираното преместване) ще бъде:

$$W = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{P^2 l^3}{6EJ_y} + k_z \frac{P^2 l}{2GF} \right) = \frac{Pl^3}{3EJ_y} + k_z \frac{Pl}{GF}$$

Първото събираемо в този израз е преместването вследствие огъването на гредата, а второто – вследствие срязващите сили. За да оценим влиянието на срязващите сили, нека да предположим, че гредата е стоманена *(E≈2,5G),* с правоъгълно напречно сечение с размери *b/h*. Тогава последният израз ще придобие вида:

$$W = \frac{Pl^3}{3EJ_y} + k_z \frac{Pl}{GF} = \frac{Pl^3}{3EJ_y}\left(1 + k_z \frac{3EJ_y}{GFl^2} \right) =$$

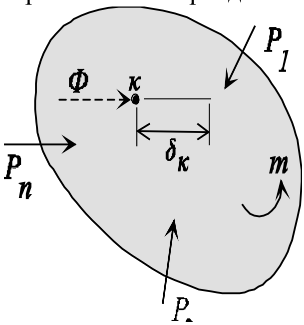
$$= \frac{Pl^3}{3EJ_y}\left(1+\frac{6}{5}\frac{3.2{,}5Gbh^3}{12Gbhl^2}\right) = \frac{Pl^3}{3EJ_y}\left(1+0{,}75\frac{h^2}{l^2}\right)$$

Вторият член в скобите показва влиянието на срязващите сили. Тъй като за греди $h/l<0{,}1$, следва, че този член е по-малък от 0,0075, което означава, че влиянието на срязващите сили върху преместването е под 1%. Макар, че направеният извод е за конкретен случай, то и в общия случай той остава валиден.

Когато обаче височината на напречното сечение е съизмерима с дължината на гредата, тогава влиянието на срязващите сили е чувствително. В този случай определянето на преместването трябва да се извършва с отчитане и на срязващите сили. Такива случаи се срещат в корабните корпусни конструкции.

9.3. Интеграли на Максвел –Мор

Теоремата на Кастиляно има едно ограничение, състоящо се в това, че не можем да определим преместването в точка, в която няма приложена външна сила (респективно завъртването, ако няма приложен момент). Това ограничение е преодоляно от **Максвел и Мор**, чийто метод на решение ще разгледаме.



Фиг. 9.4

Нека имаме еластично деформируемо тяло, натоварено с уравновесена система от сили – фиг.9.4. Нека се поставя задачата да определим хоризонталното преместване на произволна точка k, в която няма приложена сила. При това положение теоремата на Кастиляно не може да се приложи. Ако обаче приложим фиктивна (несъществуваща) сила $Ф$ в тази точка по исканото направление, тогава ще можем да използваме теоремата на Кастиляно. Спомняйки си накрая, че в действителност такава сила няма, в получения израз ще положим, че фиктивната сила е равна на нула. Или:

$$\delta_k = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{\Phi=0} \tag{9.17}$$

Формула 9.17 е валидна за всяко еластично, линейно деформируемо тяло. За прътови конструкции тя може да се конкретизира.

Нека да означим разрезните усилия от зададеното натоварване на една прътова конструкция с индекс ‘*0*’, а разрезните усилия от фиктивна сила с големина единица *(Ф=1)*, приложена в интересуващата ни точка по интересуващото ни направление, с индекс ‘ ¯ ’ . Тогава на основание на принципа на суперпозицията, сумарните разрезни усилия от зададеното натоварване и произволна фиктивна сила, приложена в точката по исканото направление, ще бъдат:

$$N = N_0 + \overline{N}\Phi \qquad M_x = M_{x,0} + \overline{M}_x\Phi$$
$$Q_y = Q_{y,0} + \overline{Q}_y\Phi \qquad M_y = M_{y,0} + \overline{M}_y\Phi$$
$$Q_z = Q_{z,0} + \overline{Q}_z\Phi \qquad M_z = M_{z,0} + \overline{M}_z\Phi \tag{9.18}$$

Потенциалната енергия на деформацията на прътовата конструкция, на основание на получения по-рано израз 9.10 и 9.18, ще бъде:

$$U = \int_l \frac{N^2}{2EF} ds + \ldots = \int_l \frac{(N_0 + \overline{N}\Phi)^2}{2EF} ds + \ldots \tag{9.19}$$

Точките след интегралите в 9.19 означават, че по аналогичен начин се записват останалите пет интеграла от формулата за потенциалната енергия 9.10.

Ако заместим получения израз 9.19 в общата формула 9.17, ще получим:

$$\delta_k = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{\Phi=0} = \frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\int_l \frac{(N_0 + \overline{N}\Phi)^2}{2EF} ds + \ldots\right)_{\Phi=0} =$$
$$= \left(\int_l \frac{2(N_0 + \overline{N}\Phi)\overline{N}}{2EF} ds + \ldots\right)_{\Phi=0} = \int_l \frac{N_0\overline{N}}{EF} ds + \ldots \tag{9.20}$$

Пълната формула за преместването ще бъде:

$$\delta_k = \int_l \frac{N\overline{N}}{EF} ds + \int_l \frac{M_x\overline{M}_x}{GJ_p} ds + \int_l \frac{M_y\overline{M}_y}{EJ_y} ds + \int_l \frac{M_z\overline{M}_z}{EJ_z} ds + k_y\int_l \frac{Q_y\overline{Q}_y}{GF} ds + k_z\int_l \frac{Q_z\overline{Q}_z}{GF} ds \tag{9.21}$$

Формула 9.21 е известна в литературата като **интеграли на Максвел – Мор**.

И така, за да определим преместване на произволна точка от прътовата конструкция по произволно направление, на основание на метода на Максвел –Мор извършваме следното:

1. Определяме разрезните усилия от зададеното натоварване.
2. Поставяме единична фиктивна сила в интересуващата ни точка по интересуващото ни направление и определяме разрезните усилия само от нея.
3. Преместването определяме по формула 9.21

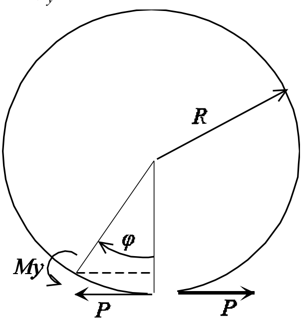
По аналогичен начин се определя и завъртване на елементарна отсечка от прътовата конструкция. Тогава в интересуващата ни точка вместо единична фиктивна сила, прилагаме единичен фиктивен момент.

Естествено, ако прътовата конструкция има n на брой участъка, интегрирането в 9.21 се извършва по всички участъци. Тежестта на шестте интеграла от 9.21 обаче е различна. Това, което казахме за техния принос при изчисляване на потенциалната енергия (формула 9.10), тук остава в сила.

Без съмнение, методът на Максвел-Мор за определяне на премествания е най-универсален и мощен от всички други разгледани методи. Не бива да забравяме обаче, че той е базиран на теоремата на Кастиляно. Тук отпадат всякакви интеграционни константи и уравнения за тяхното определяне. Можем да определим преместване или завъртване на произволна точка. Можем да отчетем влиянието на всички разрезни усилия, ако това е необходимо.

Все пак методите, разгледани преди това, имат някои преимущества – с тях се определя уравнението на еластичната линия, докато с теоремата на Кастиляно и метода на Максвел-Мор се определя преместване на конкретна точка от конструкцията.

Пример 6.2. Да се определи разтварянето на отворен пръстен, натоварен от две сили съгласно фиг.9.5. Дадено: *P, R*, коравината на огъване – EJ_y.



Фиг. 9.5

Тъй като основното разрезно усилие в пръстена е огъващия момент *My*, на основание на 9.21 можем да запишем:

$$\delta = \int_l \frac{M_y \overline{M}_y}{EJ_z} ds$$

Огъващият момент от зададеното натоварване (във функция от ъгъла φ) ще бъде:

$$M_y = PR(1 - \cos\varphi)$$

(Задачата за разрезните усилия на тази крива греда беше решена подробно в пример 1.2)

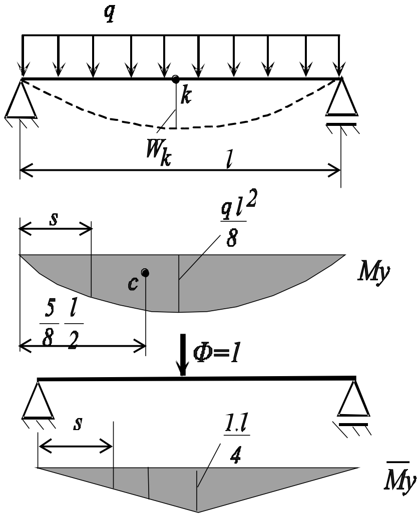
Съгласно метода на Максвел-Мор, за да определим взаимното преместване на приложните точки на силите *P*, трябва в тези точки да поставим единични фиктивни сили по същите направления. Тогава огъващият момент от тях ще бъде определен по същата формула, където вместо *P* ще заместим 1. Като вземем предвид, че $ds=Rd\varphi$, получаваме:

$$\delta = \int_l \frac{M_y \overline{M}_y}{EJ_y} ds = \int_l \frac{PR(1-\cos\varphi).1.R(1-\cos\varphi)}{EJ_y} Rd\varphi =$$

$$= \frac{PR^3}{EJ_y}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = 3\pi\frac{PR^3}{EJ_y}$$

При решаването на задачи от премествания на криви греди се налага винаги да се решават определени интеграли, в които подинтегралните функции са някакви тригонометрични функции, както в случая. За по-бързото решаване на тези интеграли могат да се ползуват справочните ръководства [8] и [12].

Пример 6.3. Да се определи преместването по средата на греда на две опори, натоварена с равномерно разпределен товар *q* - фиг.9.6. Дадено *q, l, EJy*.



Фиг. 9.6

Както в предидущата задача, преместването ще определим само чрез интеграла с огъващия момент:

$$\delta_\kappa = \int_l \frac{M_y \overline{M}_y}{EJ_z} ds \qquad \text{(a)}$$

Огъващият момент от външния товар има вида:

$$M_y = \frac{ql}{2}s - \frac{qs^2}{2}$$

Огъващият момент от единичната фиктивна сила, приложена в средата на гредата, за първия участък има вида

$$\overline{M}_y = \frac{1}{2}s$$

Заместваме в интеграла а), като поради симетрията, интегрираме в границите *0 - l/2* и резултатът умножаваме по две:

$$\delta_\kappa = \int_l \frac{M_y \overline{M}_y}{EJ_z} ds = 2\int_0^{l/2}\frac{q(ls-s^2)s}{4EJ_y} ds = \frac{q}{2EJ_y}\left(\frac{ls^3}{3}-\frac{s^4}{4}\right)_0^{l/2} = \frac{5ql^4}{384EJ_y}$$

Когато търсим преместване на греда или рамка, състояща се от прави участъци, огъващият момент от фиктивната сила (както и всички други разрезни усилия в 9.21 с черта над тях) е винаги линейна функция. В този случай интегралът а) може да се реши по правилото на **Верещагин**, разгледано в гл.2. Както знаем от това правило, за да решим определения интеграл, е достатъчно да познаваме диаграмите на функциите под интеграла, в случая на *My* и $\overline{M}_y$ – фиг.9.6. Преумножаваме едната половина от диаграмите и поради симетрията, резултатът умножаваме по две. Получаваме:

$$\delta_к = \int_l \frac{M_y \overline{M}_y}{EJ_z} ds = \frac{1}{EJ_z} 2 \int_0^{l/2} M_y \overline{M}_y ds = \frac{1}{EJ_z} 2 \frac{2}{3} \frac{l}{2} \frac{ql^2}{8} \frac{5}{8} \frac{l}{4} = \frac{5ql^4}{384EJ_y}$$

Резултатът е същият, но е получен пряко чрез преумножение на диаграмите.

9.4. Деформации и напрежения в цилиндрични винтови пружини

Цилиндричните пружини се срещат много често в машините и винаги играят важно значение за правилното им функциониране. От гледна точка на Съпротивление на материалите те са пространствени криви греди. Определяне на деформациите в тях при различно натоварване се определя лесно, ако се използуват интегралите на Максвел – Мор.

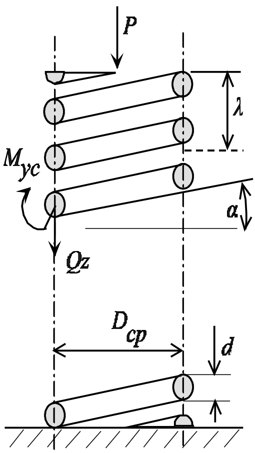
А) Пружини, работещи на опън - натиск.

Параметрите на една такава пружина са – фиг.9.7: диаметър на телта, от който е изработена пружината - d, среден диаметър на пружината – $D_{ср}$, брой на навивките – n и ъгъл на наклона на навивките – α. Ще разгледаме пружини с малък ъгъл на наклона – $\alpha.<5^o$.

Пружините за опън се различават от пружините за натиск единствено по оформлението на краищата – фиг.9.8. Пружините за натиск са с плоско шлифовани краища, докато пружините за опън са с оформени куки за предаване на силата. Пружините за натиск не бива да са много високи, за да не загубят устойчивост. Ще разгледаме цилиндрична винтова пружина, натоварена на натиск.

Поради малкия ъгъл на наклона, при натоварване в напречното сечение на пружината възникват основно две разрезни усилия – усукващ момент $M_{ус}=P.D_{ср}/2$ и срязваща сила $Q_z=P$. Следователно пружина, натоварена на натиск, работи основно на усукване. Същото се отнася и за пружина, работеща на опън.

За да определим деформацията на пружината λ по метода на Максвел – Мор, трябва да определим разрезните усилия от единичната сила $\Phi=1$, приложена на мястото на силата P. Очевидно разрезните усилия от тази сила ще бъдат $\overline{M}_{ус} = 1.D_{ср}/2$ и $\overline{Q}_z = 1$. Като пренебрегнем влиянието на срязващата сила, за преместването на горния край на пружината при неподвижен долен край (което представлява деформацията на пружината) ще получим:



Фиг. 9.7

$$\lambda = \int\limits_{l} \frac{M_{yc}\overline{M}_{yc}}{GJ_p} ds = \int\limits_{0}^{\pi D_{cp} n} \frac{PD_{cp}.1.D_{cp}}{4GJ_p} ds = P\frac{\pi D_{cp}^3 n}{4GJ_p} \qquad (9.22)$$

Тук интегрирането е извършено по цялата дължина на пружината - $l=\pi D_{cp}.n$.

Ако сечението на телта на пружината е кръгло, ще получим:

$$\lambda = P\frac{\pi D_{cp}^3 n.32}{4G\pi d^4} = P\frac{8D_{cp}^3 n}{Gd^4} \qquad (9.23)$$

Обикновено последният израз се записва така:

$$P = c\lambda \qquad (9.24)$$

където c- **коравина** на пружината на опън/натиск (константа за дадена пружина).

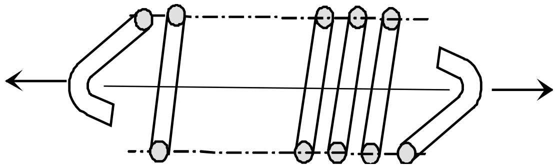
$$c = \frac{Gd^4}{8D_{cp}^3 n} \qquad [N/m] \qquad (9.25)$$

Максималната сила на натиск на пружината е функция на нейната деформация:

$$P_{\max} = c\lambda_{\max} \qquad (9.26)$$

Максималното напрежение от усукващия момент ще бъде:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{yc,\max}}{W_p} = \frac{P_{\max}D_{cp}16}{2\pi d^3} = \frac{8P_{\max}D_{cp}}{\pi d^3} \le [\tau] \quad \rightarrow \quad d \ge \sqrt[3]{\frac{8P_{\max}D_{cp}}{\pi [\tau]}} \qquad (9.27)$$



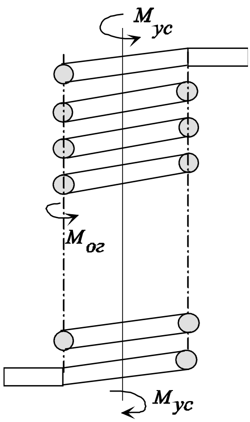
Фиг. 9.8

Уравнения 9.25 и 9.27 се използуват за оразмеряване на пружината. В тях се съдържат три неизвестни – d, D_{cp} и n. Средният диаметър D_{cp} се избира обикновено по конструктивни съображения. Останалите се изчисляват от уравненията. За пружини, работещи на натиск, поради шлифоване на краищата, броят на навивките се намалява с шлифованата част от пружината.

Когато пружините се използуват за амортизация на обекти, коравината се подбира по други критерии, които ще разгледаме в гл. 16.

Б) Пружини, работещи на усукване

За да бъде усукана, краищата на пружината са специално оформени – фиг.9.9.



Фиг. 9.9

Усукващият момент, приложен в двата края на пружината за напречното сечение на телта се явява огъващ момент. Затова ъгълът на усукване на пружината ще определим, като от интегралите на Максвел –Мор ще вземем този с огъващия момент. Получаваме:

$$\varphi = \int_l \frac{M_y \overline{M}_y}{EJ_y} ds = \int_0^{\pi D_{ср} n} \frac{M_{ус}.1}{EJ_y} ds = \frac{M_{ус} \pi D_{ср} n}{EJ_y} \tag{9.28}$$

За кръгло сечение на телта на пружината получаваме:

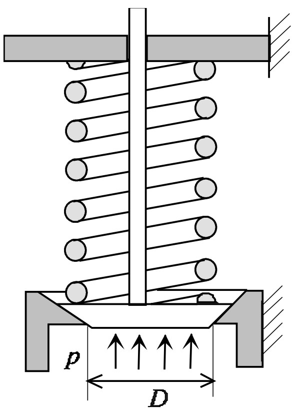
$$\varphi = \frac{M_{ус} \pi D_{ср} n.64}{E\pi d^4} = \frac{64 M_{ус} D_{ср} n}{E d^4} \tag{9.29}$$

От тук **коравината на усукване** на пружината ще бъде:

$$c_\varphi = \frac{M_{ус}}{\varphi} = \frac{M_{ус,\max}}{\varphi_{\max}} = \frac{E d^4}{64 D_{ср} n} \quad [Nm/rad] \tag{9.30}$$

В напречното сечение на телта на пружината ще възникне нормално напрежение, максималната стойност на което ще бъде:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y,\max}}{W_y} = \frac{32 M_{ус,\max}}{\pi d^3} \le [\sigma] \tag{9.31}$$



Фиг.9.10

Оразмеряването извършваме с помощта на уравнения 9.30, 9.31, където обикновено $D_{ср}$ се задава по конструкторски съображения.

Пружините се изработват от специални ‘пружинни’ стомани с много висока граница на пропорционалност, достигаща 2000 Мра.

Задача 9.3. Предпазителен клапан на резервоар за сгъстен въздух с диаметър *D=1 cm* трябва да отвори при налягане *p=10 atm* – фиг. 9.10. Да се оразмери пружината на клапана, ако за материала на клапана $[\tau]=400\ MPa$, $G=0,8.10^{11}\ N/m^2$. Пружината е била предварително свита с $\lambda_o=1\ см$.

Силата от налягането върху клапана е:

$$P_1 = p\frac{\pi\ D^2}{4} = 10\frac{\pi\ .1^2}{4} = 7,85\ k\Gamma = 77\ N$$

Силата от деформацията на пружината върху клапана е:

$$P_2 = c\lambda_0$$

където - коравина на пружината.

Когато $P_2>P_1$, клапанът ще се отвори.

Подбираме конструктивно среден диаметър на пружината $D_{cp}=2\ см$. От якостното условие 9.27 определяме диаметъра на телта:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{8P_{\max}D_{cp}}{\pi\ [\tau\ ]}} = \sqrt[3]{\frac{8.77.0,02}{\pi\ .400.10^6}} = 2,142.10^{-3}\ m$$

Приемаме $d=2,5\ mm$. Коравината на пружината трябва да е: $c=P_2/\lambda_o=77/0,01=7700\ N/m$. От 9.25 определяме броя на навивките на пружината:

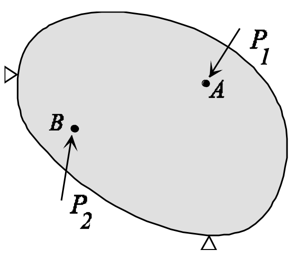
$$n = \frac{8D_{cp}^3c}{Gd^4} = \frac{8.0,02^3.7700}{0,8.10^{11}.0,0025^4} = 7,88$$

Приемаме 8 навивки на пружината.

9.5. Теореми за взаимност на работата и премествванията

А) Теорема за взаимност на работата

Разглеждаме еластично, линейно деформируемо тяло, закрепено в пространството. В точките *A* и *B* на това тяло ще приложим две сили P_1 и P_2 – фиг.9.11. Понеже тялото е деформируемо, техните приложни точки се преместват и те извършват работа. Ще разгледаме две енергетични състояния на тялото:



Фиг. 9.11

Състояние 1) Прилагаме силата P_1 и след това силата P_2. Изчисляваме работата, която тези сили ще извършат.

Когато приложим силата P_1, тя ще извърши работа, която на основание на теоремата на Клапейрон ще бъде:

$$A(P_1) = \frac{1}{2}P_1\delta_{A,1} \qquad (9.32)$$

Тук $\delta_{A,1}$ – проектирано преместване на т.*A* по направление на силата P_1. Тук и по-нататък първият индекс на преместването означава точката, а вторият индекс – силата, която го е предизвикала.

Сега прилагаме силата P_2. Нейната приложна точка (т.B) ще се премести, но ще се премести и приложната точка на силата P_1 (т.A). Работите които двете сили ще извършат, ще бъдат:

$$A(P_2) = \frac{1}{2} P_2 \delta_{B,2} \qquad A(P_1) = P_1 \delta_{A,2} \tag{9.33}$$

Работата на силата P_1 в 9.33 е без коефициент ½, тъй като на този етап тази сила е постоянна.

Състояние 2) При това енергетично състояние разменяме реда на прилагане на силите. По аналогия на първото състояние, когато приложим силата P_2, нейната работа ще бъде:

$$A(P_2) = \frac{1}{2} P_2 \delta_{B,2} \tag{9.34}$$

Прилагаме силата P_1 и аналогично получаваме:

$$A(P_1) = \frac{1}{2} P_1 \delta_{A,1} \qquad A(P_2) = P_2 \delta_{B,1} \tag{9.35}$$

В края на първото и второто енергетични състояния сумарната работа трябва да е една и съща, тъй като силите са едни и същи. Получаваме:

$$\frac{1}{2} P_1 \delta_{A,1} + \frac{1}{2} P_2 \delta_{B,2} + P_1 \delta_{A,2} = \frac{1}{2} P_2 \delta_{B,2} + \frac{1}{2} P_1 \delta_{A,1} + P_2 \delta_{B,1} \tag{9.36}$$

След опростяване, получаваме:

$$P_1 \delta_{A,2} = P_2 \delta_{B,1} \tag{9.37}$$

Това е аналитичния израз на **теоремата за взаимност на работите**, известна като теорема на **Бетти**. Тази теорема гласи:

За една линейно деформируема еластична система работата, която извършва една сила при преместване на приложната и точка от втора сила е равна на работата, която извършва втората сила при преместване на приложната и точка вследствие действието на първата сила.

Б) Теорема за взаимност на преместванията

Ако в израза 9.37 положим, че двете сили са равни помежду си (P_1=P_2), ще получим:

$$\delta_{A,2} = \delta_{B,1} \tag{9.38}$$

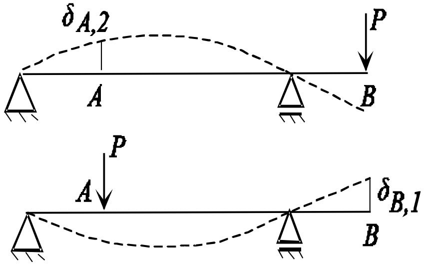
Формула 9.38 изразява **теоремата за взаимност на преместванията**, която гласи:

Преместването на произволна точка A под действието на сила, приложена в точка B е равно на преместването на точка B под действието на същата сила, приложена в т.A – фиг.9.12.

Тази теорема е известна като теорема ма **Максвел**.

Ако приемем друга индексация на точките - вместо A и $1 \rightarrow I$, вместо B и $2 \rightarrow J$, формула 9.38 може да се запише така:

$$\delta_{i,j} = \delta_{j,i} \tag{9.39}$$



Фиг.9.12

Както ще видим в следващата глава, теоремата на Максвел (9.39) води до значително намаляване обема на работа при анализа на сложни конструкции.

На силите и преместванията в двете теореми 9.37 и 9.38 може да се предаде обобщен смисъл – натоварванията могат да са сили, моменти, разпределени товари и др. Телата също могат да бъдат с произволна форма, стига за тях да са в сила закона на Хук и основните принципи на Съпротивление на материалите.

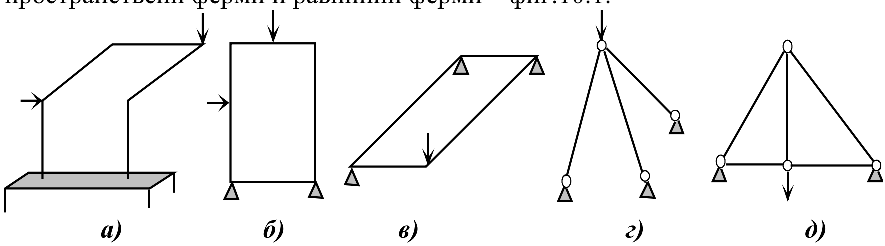
Гл.10. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕНИ СИСТЕМИ

В тази глава ще се върнем отново към въпроса за определяне на вътрешните усилия на прътови конструкции, разгледан още в гл.1. При някои прътови конструкции това не може да стане само с уравненията на статиката. За да се реши тази задача, необходимо е да се вземат под внимание и деформациите на конструкцията.

10.1. Класификация на прътовите конструкции. Степен на статическа неопределеност.

А) Класификация на конструкциите

Под '**прътова конструкция'** разбираме конструкция, съставена главно от пръти. Но според разположението на прътите, връзките между тях и натоварването, тези конструкции се делят на пет основни вида: пространствени рамки, равнинни рамки, равнинно-пространствени рамки, пространствени ферми и равнинни ферми – фиг.10.1.



Фиг.10.1. Видове прътови конструкции

В **пространствената рамка** (фиг.10.1-а) прътите са в произволно положение един спрямо друг и натоварването може да бъде по трите координатни оси. В тях възникват и шестте разрезни усилия. В опорите могат да възникват до шест реакции (сили и моменти).

Прътите на **равнинната рамка** (фиг.10.1-б) лежат в една равнина и натоварването лежи в същата равнина. В тях възникват три разрезни усилия – нормална сила, срязваща сила и огъващ момент, всички лежащи в равнината на рамката. В опорите могат да възникнат до три реакции (две сили и един момент).

Равнинно-пространствената рамка (фиг.10.1-в) е също равнинна конструкция, но натоварването е перпендикулярно на равнината на рамката. В тях възникват също три вътрешни усилия – огъващ момент, усукващ момент и срязваща сила, действуващи в равнина, перпендикулярна на рамката. В опорите също могат да възникнат до три реакции (два момента и една сила).

Пространствените ферми (фиг.10.1–г) са прътови конструкции, прътите на които са свързани помежду си ставно. Натоварването е приложено само във възлите. В тях възниква единствено нормална сила. В опорите обаче могат да възникнат до три реакции (сили).

Равнинните ферми (фиг.10.1–д) са частен случай на пространствените ферми, когато всички пръти лежат в една равнина и натоварването е в същата равнина. В опорите могат да възникнат до две реакции (сили).

Гредата, според това как е натоварена, може да бъде отнесена като частен случай към една от първите три вида конструкции.

Определянето на реакциите и вътрешните усилия на прътовите конструкции не винаги е възможно да се извърши с уравненията на статиката. Това е така, защото броят на уравненията на статиката за равновесието на една конструкция е ограничен до шест, докато броят на неизвестните реакции или вътрешни усилия може да бъде много повече.

Така например в пространствена рамка от фиг.10.1-а във всяка от опорите ще имаме по шест неизвестни реакции (общо 12 неизвестни реакции), докато броят на уравненията на статиката за тяхното определяне са само шест.

Когато уравненията на статиката са недостатъчни за определяне на опорните реакции и разрезните усилия, казваме, че системата (конструкцията) е **статически неопределена**.

Ние вече имахме случай да се срещнем с такива прътови конструкции в гл.3 – работещи само на опън-натиск и в гл.6 за пръти, работещи на усукване. Видяхме, че те се решават, като към уравненията на статиката за неизвестните се съставят в допълнение т.н. деформационни уравнения. Тук подходът ще е аналогичен, само че теорията е много по-обща и приложима към всякакъв тип прътови конструкции, разгледани по-горе. Тази теория обаче на практика се прилага за не много сложни прътови конструкции, водещи до неголям брой допълнителни уравнения. За сложни конструкции в гл.18 ще разгледаме други методи, ориентирани към използуване на изчислителна техника.

Б) Степен на статическа неопределеност

За конструкции, които не могат да се решат само с уравненията на статиката, ние въведохме понятието '**степен на статическа неопределеност**'. Това е цяло положително число (n), равно на разликата между общия брой на неизвестните (m) и броят на уравненията на статиката (s), които могат да се запишат за тях:

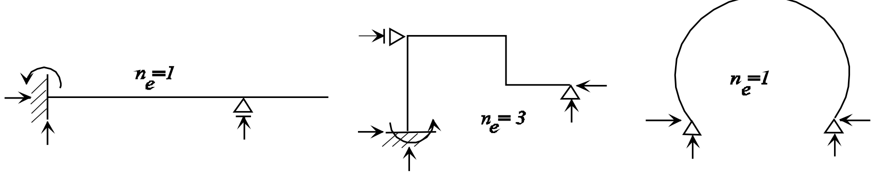
$$n = m - s \tag{10.1}$$

Определянето на степента на статическа неопределеност е първата задача, която трябва да решим. Според това, каква е конструкцията, която решаваме (рамка, ферма и т.н.), статическата неопределеност може да се окаже различно число. Тук ще покажем по-подробно подхода при определяне на статическата неопределеност за конструкции от тип равнинни рамки (равнинни ферми и гредоскари – по-нататък), а за пространствените конструкции това се извършва по подобен начин.

Статическата неопределеност на една конструкция може да бъде **външна** (n_e) и **вътрешна** (n_i). Общата неопределеност е сумата от двете неопределености.

В) Определяне степента на външна неопределеност

Външната статическа неопределеност е свързана с броя на опорните реакции и броя на независимите уравнения на статиката, които могат да се запишат за тяхното определяне. Определя се съгласно формула 10.1.



а) ***б)*** ***в)***

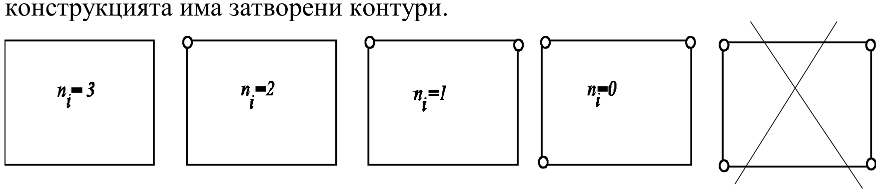
Фиг.10.2. Примери за външна неопределеност

Гредата на фиг.10.2-а е един път външно статически неопределена, защото броят на реакциите е четири, а уравненията на статика за тяхното определяне са три. По същата причина кръглата рамка от фиг.10.2-в е също един път външно статически неопределена. Рамката от фиг.10.2 – в е три пъти външно статически неопределена, защото броят на реакциите е шест, а уравненията на статика – три.

Наличието на реакция в дадена точка от системата по дадено направление наричаме още **външна връзка**.

Г) Определяне степента на вътрешна неопределеност

Вътрешна статическа неопределеност възниква в случаите, когато в конструкцията има затворени контури.



а) *б)* *в)* *г)* *д)*

Фиг. 10.3 Примери за вътрешна неопределеност

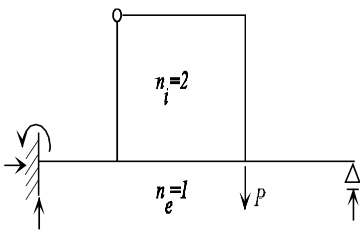
Един затворен контур в равнината (фиг. 10.3-а) е вътрешно три пъти статически неопределен. Това е така, защото ако го разрежем където и да е, той става статически определен, а в сечението на разреза има три неизвестни вътрешни усилия – нормална сила, срязваща сила и огъващ момент.

Затворен контур с една става (фиг.10.3-б) е два пъти статически неопределен, тъй като ако се разреже през ставата, огъващият момент се анулира (остават нормалната сила и срязващата сила).

Затворен контур с две стави (фиг.10.3-в) е един път статически неопределен, защото ако прътът между ставите се разреже, той изпитва само нормална сила.

Затворен контур с три стави (фиг.10.3-г), които не лежат на една права, е статически определен. Затворен контур с четири и повече стави (фиг.10.3-д) е механизъм и не се разглежда в Съпротивление на материалите.

Наличието на вътрешно (разрезно) усилие в дадено сечение наричаме още **вътрешна връзка**.



Фиг. 10.4

Д) Смесена статическа неопределеност

Смесена статическа неопределеност имаме, когато е налице външна и вътрешна неопределеност едновременно. Общата неопределеност е сумата от двете неопределености:

$$n = n_e + n_i \qquad (10.2)$$

Така за рамката от фиг.10.4 общата степен на неопределеност ще бъде три.

10.2. Решение на статически неопределени системи по силовия метод

Идеята на метода е следната: Определя се степента на статическата неопределеност – *n*. Системата се освобождава от всички излишни връзки

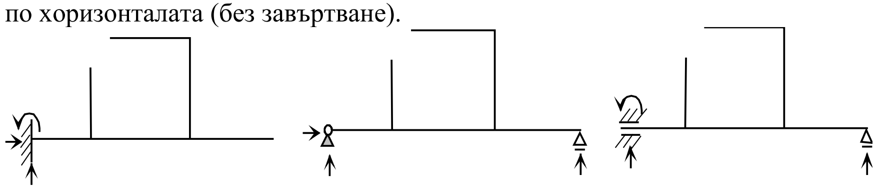
(връзки в опорите и вътрешни връзки) докато стане статически определена. За отхвърлените връзки (n на брой), на основание на възможните деформации на конструкцията се написва система алгебрични уравнения. След като тази система уравнения се реши, конструкцията се решава по известните методи за решение на статически определени системи.

А) Избор на основна система

Етапът на освобождаването на конструкцията от излишните връзки се нарича **'избор на основна система'.** Той е много важен момент от решението на задачата, защото допуска многовариантни решения. Удачната основна система е онази, която води до най-малък обем изчисления. Поради това, че този етап от решението е творчески, методът не е намерил приложение за числено решение с помощта на компютри, а се използва главно за аналитично изследване на системи с невисока степен на статическа неопределеност.

Освен, че основната система трябва да е **статически определена**, тя трябва да е и **кинематично неизменяема**. Ще припомним (виж раздел 1.7-в), че кинематично неизменяема система е тази, в която е възможно движение само след деформирането и.

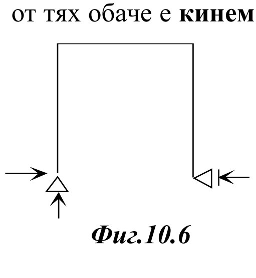
За конкретност ще разгледаме рамката на фиг.10.4. Няколко основни системи (но не всички) за нея са показани на фиг. 10.5. И при трите схеми затвореният контур е разрязан, за да стане статически определен. От четирите външни връзки (реакции) едната е излишна. В система а) е премахната дясната опора. В система б) е премахнат момента в запъването, като е въведена ставна неподвижна опора. В система в) е премахната хоризонталната сила, като вместо запъването е въведено свободно плъзгане по хоризонталата (без завъртване).



а) ***б)*** ***в)***

Фиг.10.5. Основни системи

И трите основни системи отговарят на първото условие – те са статически определени (съдържат по три неизвестни реакции). Последната от тях обаче е **кинематично изменяема** (може да се движи в хоризонтално направление като твърдо тяло) и следователно тя не може да бъде основна система. От останалите две системи по-лека за решение очевидно е първата.

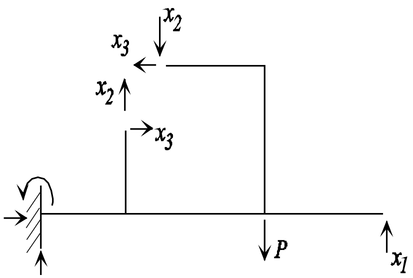


Фиг.10.6

В някои случаи може да се получи **мигновено кинематично изменяема система**, която се разпознава по-трудно. В сила е следното правило:

Ако всички реакции на системата се пресичат в една точка, то тя е мигновено кинематично неизменяема. Такава система е показана на фиг. 10.6.

Мигновено кинематично изменяеми системи се получават също, когато три или повече стави се подредят по права линия (фиг.1.24-б).



Фиг.10.7

Б) Еквивалентна система

Еквивалентната система се получава, като основната система се натовари със зададения товар, а отхвърлените излишни връзки се заместят със сили или моменти, които се приемат за неизвестни - $X_1, X_2,...,X_n$. Така за рамката на фиг.10.4 при избор на основна система съгласно фиг.10.5-а, ще има еквивалентна система, както е показано на фиг.10.7.

Забележете, че вътрешните неизвестни X_2 и X_3 се нанасят върху схемата както в лявото сечение на разреза, така и в дясното сечение. Номерирането на неизвестните е в произволен ред.

В) Канонични уравнения на силовия метод

За така построената еквивалентна система (фиг.10.7) знаем по условие, че вертикалното преместване на рамката в дясната опора в направление на силата X_1 е рано на нула и взаимното преместване на точките в мястото на разрязания контур е също нула. В случая тези три условия са необходимия брой уравнения за определяне на неизвестните X_1, X_2 и X_3.

Ще определим преместването на рамката в направление на силата X_1 (което, както казахме, по условие е равно на нула). То е предизвикано от трите неизвестни сили и от външния товар:

$$\delta_1 = \delta_{1,(X_1,X_2,X_3)} + \delta_{1,P} = 0 \qquad (10.3)$$

Тук с $\delta_{1,P}$ сме означили преместването на дясната опора по направление на силата X_1 от действието на външния товар.

Ако означим с $\delta_{1,1}$ преместването на рамката в направление на силата X_1 от $X_1=1$, с $\delta_{1,2}$ – преместването в същото направление от сила $X_2=1$ и т.н, на основание принципа на суперпозицията можем да запишем:

$$\delta_{1,(X_1,X_2,X_3)} = \delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 + \delta_{1,3}X_3 \qquad (10.4)$$

Заместваме 10.4 в 10.3:

$$\delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 + \delta_{1,3}X_3 + \delta_{1,P} = 0 \qquad (10.5)$$

Аналогични две уравнения могат да се запишат и за останалите две взаимни премествания на точките в мястото на разреза по направление на силите X_1 и X_2.

$$\delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 + \delta_{2,3}X_3 + \delta_{2,P} = 0$$
$$\delta_{3,1}X_1 + \delta_{3,2}X_2 + \delta_{3,3}X_3 + \delta_{3,P} = 0 \qquad (10.6)$$

Уравнения 10.5 и 10.6 са пълната система алгебрични уравнения за неизвестните X_1, X_2 и X_3.

За рамка със степен на статическа неопределеност n системата алгебрични уравнения, по аналогия, ще има вида:

$$\delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 + \ldots + \delta_{1,n}X_n = -\delta_{1,P}$$
$$\delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 + \ldots + \delta_{2,n}X_n = -\delta_{2,P}$$
$$\ldots$$
$$\delta_{n,1}X_1 + \delta_{n,2}X_2 + \ldots + \delta_{n,n}X_n = -\delta_{n,P} \qquad (10.7)$$

Системата алгебрични уравнения 10.7 се нарича **система канонични уравнения** на силовия метод. Както виждаме, тя е линейна нехомогенна система и следователно има едно единствено решение (ако детерминантата от коефициентите пред неизвестните е различна от нула, което за всяка реална конструкция е вярно). Използувайки матричната символика, системата 10.7 можем да запишем във вида:

$$\boldsymbol{A.X=B} \qquad (10.8)$$

където A- матрица от коефициентите пред неизвестните, $\boldsymbol{X}$ – вектор на неизвестните, $\boldsymbol{B}$ – вектор, зависещ от натоварването.

Изхождайки от определението на коефициента $\delta_{i,j}$ – преместване в направление i от единична сила, приложена в направление j, на основание на метода на Максвел-Мор, ограничавайки се само с интеграла на огъващия момент, този коефициент ще бъде:

$$\delta_{i,j} = \int_l \frac{\overline{M}_{y,i}\overline{M}_{y,j}}{EJ_y}\,ds \qquad (10.9)$$

Тук под интеграла са огъващите моменти в рамката от единичните сили, приложени в направления i и j на неизвестните. На основание на теоремата за взаимност на преместванията знаем, че $\delta_{i,j}= \delta_{j,i}$, което впрочем се вижда и от 10.9. Следователно системата алгебрични уравнения 10.8 е със симетрична матрица A от коефициентите пред неизвестните. Това намалява значително обема на работа при определяне на тези коефициенти, особено при рамки с висока степен на статическа неопределеност.

По подобен начин се изчисляват и коефициентите $\delta_{i,P}$:

$$\delta_{i,P} = \int_l \frac{\overline{M}_{y,i} M_{y,P}}{EJ_y} ds \qquad (10.10)$$

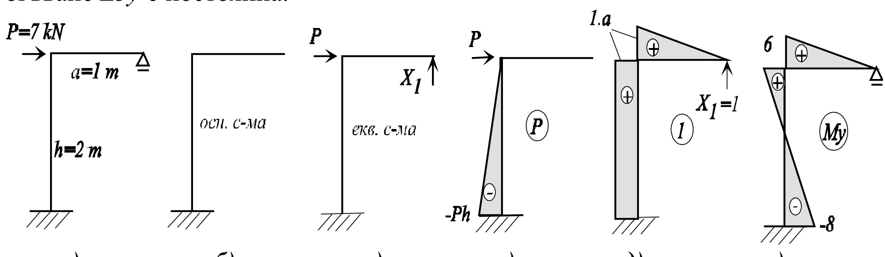
Тук $M_{y,p}$ е огъващия момент от зададеното външно натоварване.

Интегралите 10.9 и 10.10 за праволинейните участъци на рамките могат да се решат по правилото на Верещагин. От тях се вижда още, че индексите на коефициентите показват кои диаграми се преумножават.

След решаване на системата алгебрични уравнения 10.7, неизвестните сили от рамката на фиг.10.7 стават известни. Доколкото основната система е статически определена, тя се решава от тук нататък по методите за статически определени рамки.

Може да се забележи, че ако всички участъци на рамката имат една и съща коравина на огъване (*EJy=const*), всички коефициенти ще съдържат този множител и следователно системата 10.7 може да се съкрати на него. Тогава решението за неизвестните няма да зависи от коравината на огъване, респективно от формата на сечението. Ако коравините на огъване на различните участъци обаче са различни, тогава и решението за неизвестните ще зависи от тях.

Г) Пример 10.1. Да се разкрие статическата неопределеност и се построи диаграмата на *My* за рамката, показана на фиг.10.8-а. Коравината на огъване *EJy* е постоянна.



Фиг. 10.8

Системата е един път външно статически неопределена.

Приемаме основна система съгласно схема б). Еквивалентната система ще има вида в). Системата канонични уравнения се преобразува до едно единствено уравнение:

$$\delta_{1,1} X_1 = -\delta_{1,P}$$

За да определим коефициентите на уравнението, построяваме диаграмата на огъващия момент от външния товар (схема г) и от единичната неизвестна сила $X_1=1$ (схема д). Преумножаваме диаграмите по правилото на Верещагин съгласно индексите на коефициентите: за коефициента δ_{11} –

диаграма *1* сама на себе си и за коефициента δ_{1p} – диаграма *1* с диаграма *P*. Получаваме:

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EJ_y}\left(\frac{1}{2}a^2\frac{2}{3}a + ha.a\right) = \frac{a^3 + 3a^2h}{3EJ_y} \qquad \delta_{1,P} = -\frac{1}{EJ_y}\frac{Ph^2}{2}a$$

Заместваме в каноничното уравнение и получаваме:

$$X_1 = -\frac{\delta_{1,P}}{\delta_{1,1}} = \frac{3Ph^2a}{2(a^3 + 3a^2h)} = \frac{3.7.4.1}{2(1+3.1.2)} = 6\,kN$$

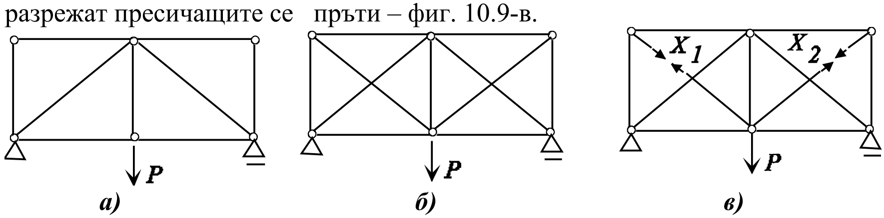
От тук нататък работим с еквивалентната система в) (статически определена), в която силата X_1 е известна. Диаграмата на огъващия момент за нея (следователно и за дадената рамка) е показана на схема е).

Д) Статически неопределени равнинни ферми

Както вече казахме, фермите са прътови конструкции, съставени от ставно свързани помежду си пръти, натоварени във възлите. При такава геометрия и натоварване, прътите изпитват единствено опън или натиск. В гл.3 подчертахме, че тези прътови конструкции са най-малко материалоемки.

Външната статическа неопределеност на една равнинна ферма се определя по същия начин, както и равнинната рамка. При определянето на вътрешната статическа неопределеност има някои особености.

Преди всичко ще подчертаем, че ако една равнинна ферма се състои от непресичащи се пръти (или триъгълници) – фиг.10.9-а, тя е статически определена. Ако има обаче пресичащи се пръти – фиг.10.9-б, тя става статически неопределена. Всички пресичащи пръти са излишни за кинематичната неизменяемост на фермата и затова степента на статическата неопределеност е равна на броя на пресичащите пръти – в случая n=2 (в тях възникват само нормални сили). Основната система се получава, като се разрежат пресичащите се пръти – фиг. 10.9-в.



Фиг.10.9

Друга особеност при фермите е, че когато се търсят коефициентите на системата канонични уравнения 10.7, от интегралите на Максвел-Мор остава само интеграла с нормалната сила. Поради това, че за всеки прът поотделно нормалните сили са постоянни, интегрирането може да се замени с просто сумиране, т.е.:

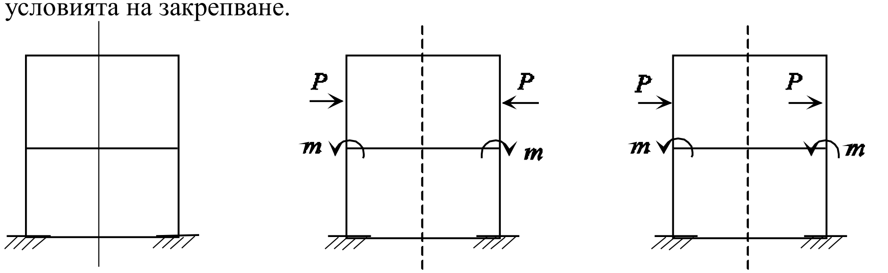
$$\delta_{i,j} = \int_l \frac{\overline{N}_i \overline{N}_j}{EF} ds = \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{\overline{N}_i \overline{N}_j}{EF} \right)_k l_k \qquad \delta_{i,P} = \int_l \frac{\overline{N}_i N_P}{EF} ds = \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{\overline{N}_i N_P}{EF} \right)_k l_k \tag{10.11}$$

където r- общ брой на прътите.

10.3. Използуване на симетрията

А) Определения

Казваме, че една конструкция е ***симетрична***, ако едната и половина е огледален образ на другата половина – фиг. 10.10-а. С пунктираната линия сме означили **равнината на симетрия**. При това трябва да са симетрични и условията на закрепване.



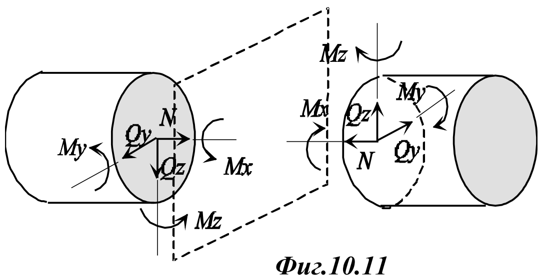
а) симетрична рамка ***б)*** симетричен товар ***в)*** антисиметричен товар

Фиг.10.10

Натоварването е **симетрично**, ако натоварването на едната половина на рамката е огледален образ на натоварването на другата половина – фиг. 10.10-б.

Казваме, че натоварването е **антисиметрично**, ако натоварването на едната половина на рамката е обърнат огледален образ на натоварването на другата половина – фиг. 10.10 – в.

Сега нека разгледаме разрезните усилия в едно сечение на греда в най-общия случай на натоварване – фиг.10.11. От шестте разрезни усилия три от тях са симетрични – *N, My* и *Mz*, а три са антисиметрични – *Qy, Qz* и *Mx*.



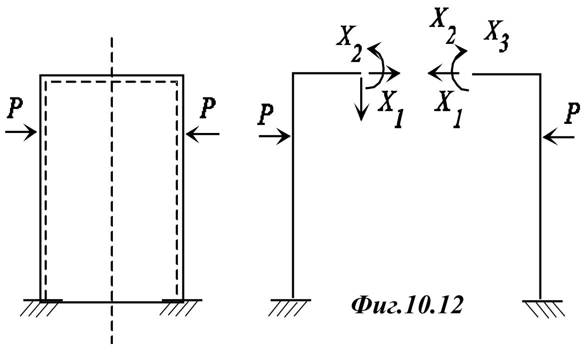
Фиг.10.11

В показаните случаи на фиг. 10.10 се оказва, че степента на статическа неопределеност се понижава. Това води до съответно понижение на броя на алгебричните уравнения и обема работа за определяне на техните коефициенти. Във връзка с това ще докажем две теореми.

Б) Теорема за симетричния товар

Тази теорема гласи: Симетрична рамка, натоварена със симетричен товар (фиг.10.10-б), изпитва в равнината на симетрия само симетрични разрезни усилия. Антисиметричните разрезни усилия са равни на нула.

Доказателството на тази теорема ще разгледаме на конкретна симетрична рамка със симетричен товар, показана на фиг.10.12.

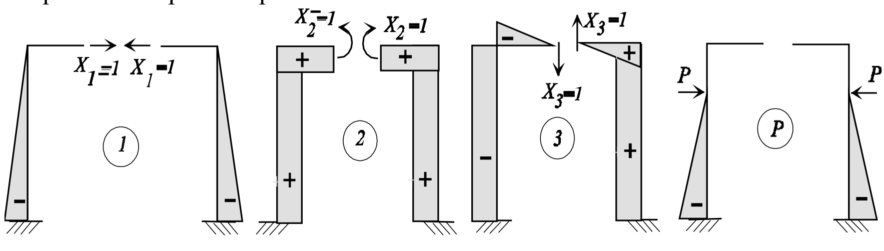


Фиг.10.12

Рамката е три пъти статически неопределена. Основната, съответно еквивалентната система е избрана, като рамката е разрязана в равнината на симетрия, където действуват три вътрешни неизвестни сили – нормална сила *(X_1)*, огъващ момент *(X_2)* и срязваща сила *(X_3)*. Като вътрешни сили, те действуват както върху лявата част на рамката, така и върху дясната част. Системата канонични уравнения ще има вида:

$$\delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 + \delta_{1,3}X_3 = -\delta_{1,P}$$
$$\delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 + \delta_{2,3}X_3 = -\delta_{2,P}$$
$$\delta_{3,1}X_1 + \delta_{3,2}X_2 + \delta_{3,3}X_{3,3} = -\delta_{3,P} \qquad (10.12)$$

Построяваме диаграмите от единичните неизвестни сили и от външния товар – фиг.10.13, като предполагаме, че реперната линия е от вътрешната страна на рамката.



Фиг.10.13

Определяме коефициентите чрез преумножаване на съответните диаграми. Може да се забележи, че поради симетрията на двете половини, диаграмите от първата единична сила и от втората единична сила, както и от външния товар са симетрични, докато от третата единична сила е антисиметрична. Произведението от симетрична по антисиметрична диаграма е нула, тъй като при преумножаването на двете половини получаваме един и същи резултат с противоположен знак. На тази база коефициентите $\delta_{1,3}$, $\delta_{2,3}$ и $\delta_{3,P}$ са равни на нула. Тогава системата алгебрични уравнения се преобразува във вида:

$$\delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 = -\delta_{1,P}$$
$$\delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 = -\delta_{2,P}$$
$$\delta_{3,3}X_3 = 0 \qquad (10.13)$$

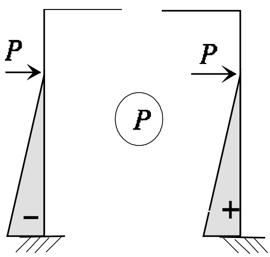
От тук следва, че $X_1 \neq 0$, $X_2 \neq 0$, $X_3 = 0$, което трябваше да докажем.

Тъй като двете половини на рамката са симетрични, достатъчно е да работим само с едната половина. Получените разрезни усилия за нея са валидни и за другата половина, като се съобразяваме само със знаците – *My* и *N* имат симетрични диаграми, а *Qz* - антисиметрична диаграма.

В) Теорема за антисиметричния товар

Тази теорема гласи: Симетрична рамка, натоварена със антисиметричен товар (фиг.10.10-в), изпитва в равнината на симетрия само антисиметрични разрезни усилия. Симетричните разрезни усилия са равни на нула.

Доказателството на тази теорема извършваме аналогично на предишната, като използуваме рамката от фиг.10.12, но в дясната половина силата *P* е с обратна посока, за да бъде товарът антисиметричен. В този случай предполагаме отново, че системата е три пъти статически неопределена и следователно ще има същите канонични уравнения 10.12. Диаграмите от единичните неизвестни сили остават същите, както на фиг. 10.13. Ще се промени само диаграмата от външния товар, която ще стане антисиметрична – фиг.10.14. При преумножаване на диаграмите сега ще получим, че коефициентите $\delta_{1,3}$, $\delta_{2,3,}$ $\delta_{1,P}$ и $\delta_{2,P}$ са равни на нула. Системата алгебрични уравнения се преобразува във вида:



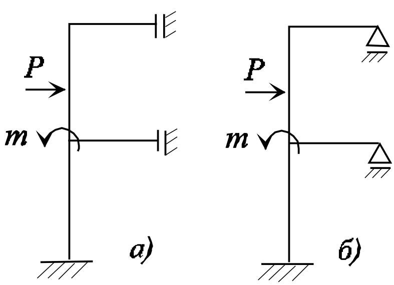
Фиг. 10.14

$$\delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 = 0$$
$$\delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 = 0$$
$$\delta_{3,3}X_3 = \delta_{3,p} \qquad (10.14)$$

Решението на тази система е $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 \neq 0$, което трябваше да докажем.

Аналогично на първия случай, поради симетрията на двете половини, можем да работим само с едната от тях. Получените разрезни усилия за Qz са едни и същи за двете половини, а за N и My – с противоположни знаци.

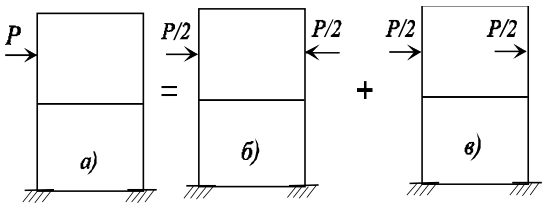
Както виждаме, теоремите за симетрия и антисиметрия на товара редуцират неизвестните, което води съответно до по-малък обем изчислителна работа, особено, ако рамката е с по-висока степен на статическа неопределеност и се решава аналитично.



Фиг.10.15

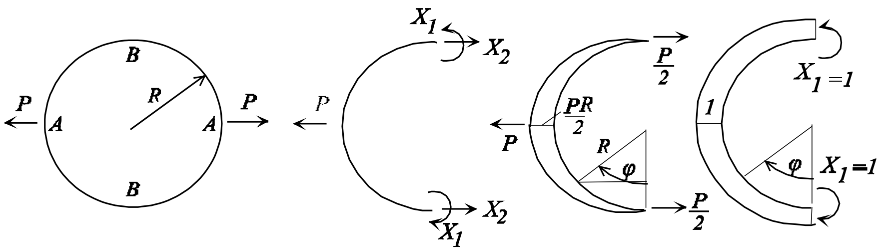
Тези теореми могат да се използват и при решението на задачите с компютър. Например, вместо целите рамки от фиг.10.10-б,в, можем да разгледаме само половините им, като на основание на доказаните теореми, в равнината на симетрия трябва да въведем подходящи гранични условия. При симетричен товар се въвежда 'Q' апарат (опора, в която срязващата сила е равна на нула) – фиг.10.15-а, а при антисиметричен товар, се въвежда подвижна ставна опора – фиг.10.15-б, в която огъващият момент и нормалната сила са равни на нула. Но за съвременните компютри дали ще разгледаме само половината рамка, няма особено голямо значение, тъй като скоростта им е достатъчно висока. Тези теореми имат обаче друго значение. Независимо от това, как ще решаваме една симетрична конструкция – аналитично или числено, при симетрично натоварване в равнината на симетрия трябва да получим, че срязващата сила е равна на нула, а при антисиметрично натоварване, в равнината на симетрия трябва да действува само срязваща сила.

Ако рамката е симетрична, а натоварването – произволно, чрез разлагане на натоварването отново можем да използваме симетрията. Например, вместо рамката на фиг.10.16-а, която е очевидно шест пъти статически неопределена, чрез разлагане на силата както е показано, ще приведем решението до решения на две рамки, първата – четири пъти статически неопределена, а втората – два пъти, което е за предпочитане.



Фиг. 10.16

Г) Пример 10.2. Да се определят значенията на огъващите моменти в точките *A* и *B* за рамката, изобразена на фиг.10.17-а. Дадено: *P, R, EJy=const.*



а) *б)* *в)* *г)*

Фиг.10.17

Рамката е симетрична и със симетричен товар. Във вертикалната равнина на симетрия на основание на теоремата за симетричния товар ще действуват само огъващ момент и нормална сила, които означаваме с X_1 и X_2. Поради това, че рамката е с двойна симетрия, тези усилия в горното и долното сечение са едни и същи. Нормалната сила X_2 може да се намери от уравнението на статиката:

$$\sum x = 0 \quad \rightarrow \quad 2X_2 - P = 0 \quad \rightarrow \quad X_2 = \frac{P}{2}$$

С това задачата се превръща в един път статически неопределена. За огъващия момент X_1 ще запишем уравнението на силовия метод:

$$\delta_{1,1} X_1 = -\delta_{1,p}$$

Диаграмите от външния товар и единичния неизвестен момент са показани на схеми в) и г). Аналитичните изрази на моментите са:

$$\overline{M}_1 = 1 \qquad M_{y,P} = -\frac{P}{2} R(1-\cos\varphi)$$

Коефициентите ще определим чрез интегралите на Максвел-Мор.

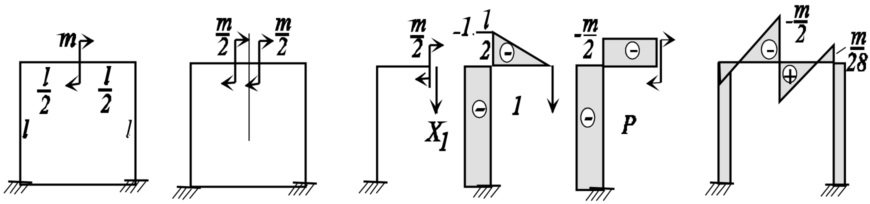
$$\delta_{1,1} = \int_0^{\pi} \frac{1}{EJ_y} R d\varphi = \frac{R\pi}{EJ_y} \qquad \delta_{1,2} = -2\int_0^{\pi/2} \frac{PR(1-\cos\varphi)}{2EJ_y} R d\varphi = -\frac{PR^2}{EJ_y}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$\rightarrow \quad X_1 = -\frac{\delta_{1,P}}{\delta_{1,1}} = PR\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) = 0{,}182PR$$

От тук определяме значенията на огъващия момент в точките А и В:

$$M_A = -\frac{PR}{2} + X_1 = -0{,}318PR \qquad M_B = X_1 = 0{,}182PR$$

Д) Пример 10.3. За рамката с размери и натоварване съгласно фиг. 10.18, да се определи диаграмата на огъващия момент. Дадено: *P, l, EJy = const.*



а) *б)* *в)* *г)* *д)* *е)*

Фиг.10.18

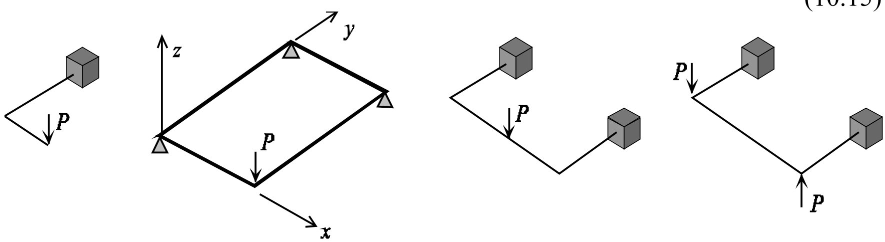
Ако разделим момента на две (схема б), рамката се превръща в симетрична рамка с антисиметричен товар. Така тя се превръща в един път статически неопределена рамка. Еквивалентната схема е показана на схема в). От тук нататък задачата се решава, както зад.10.1. Диаграмата на огъващия момент е показана на схема е).

10.4. Равнинно - пространствени системи

Равнинно пространствените системи представляват равнинни рамки, натоварени перпендикулярно на равнината на рамката – фиг. 10.19. Често се наричат за краткост **гредоскари** или само **скари.**

Ако системата е статически определена и лежи в равнината *XY*, при което натоварването е по ос *Z* – фиг. 10.19-а, в произволно сечение възникват три разрезни усилия – огъващ момент *My*, усукващ момент *Mx* и срязваща сила *Qz*. Ако рамката е статически неопределена, няма никаква причина в рамката да не възникнат същите разрезни усилия – фиг. 10.19-б. Това веднага внася важна особеност при изчисляване на коефициентите на системата канонични уравнения – те трябва да се изчисляват, като се вземе под внимание не само огъващия момент, но и усукващия момент, доколкото техните приноси към преместванията са от един порядък, т.е:

$$\delta_{i,j} = \int_l \frac{\overline{M}_{x,i}\overline{M}_{x,j}}{GJ_p}ds + \int_l \frac{\overline{M}_{y,i}\overline{M}_{y,j}}{EJ_z}ds \qquad \delta_{i,p} = \int_l \frac{\overline{M}_{x,i}M_{x,p}}{GJ_p}ds + \int_l \frac{\overline{M}_{y,i}M_{y,p}}{EJ_z}ds \tag{10.15}$$



а) **б)** **в)** **г)**

Фиг. 10.19

За праволинейните участъци тези интеграли могат да се решат с правилото на Верещагин.

При определяне на външната статическа неопределеност в опорите могат да възникнат вертикални реакции и два момента. Доколкото уравненията на статиката за равновесие са също три, ако броят на реакциите е повече от три, рамката е външно статически неопределена.

Ако са налице затворени контури, всеки контур е три пъти статически неопределен. В този тип рамки стави се използуват много рядко. Тогава рамката от фиг.10.19-б ще е външно определена и вътрешно три пъти статически неопределена. Еквивалентната система ще получим, като разрежем рамката в произволно сечение, където ще въведем три вътрешни неизвестни усилия - усукващ момент, огъващ момент и срязваща сила.

Ако рамката е симетрична, за нея остават в сила теоремите за симетрично и антисиметрично натоварване, разгледани по-горе. Но сега имаме само едно симетрично усилие – My и две антисиметрични - Mx и Qz. Поради тази причина рамката на фиг.10.19-в (симетрично натоварена) ще е един път статически неопределена, а рамката на фиг.10-19-г (антисиметрично натоварена) ще е два пъти статически неопределена, ако се разрежат в равнината на симетрия.

Ако рамката е натоварена с пространствена система сили, те се разлагат в равнината на рамката и в равнина, перпендикулярна на рамката, след което всяка рамка се решава поотделно. Окончателното заключение за опасното сечение се прави след като се вземат резултатите от разрезните усилия за двете равнини.

Поради големия обем изчисления, при които е твърде вероятно да се допусне грешка, препоръчително е пространствените рамки да се решават с компютри.

10.5. Непрекъснати греди. Тримоментово уравнение.

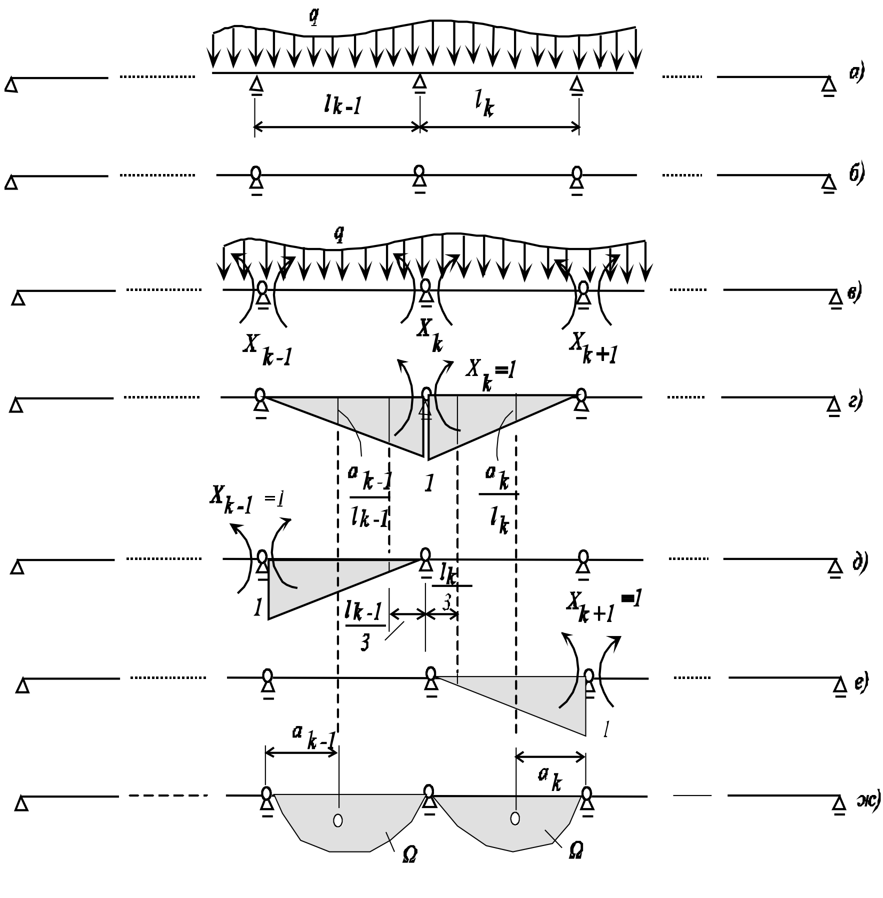
Непрекъснати греди са тези, които по своето протежение нямат стави. Ако гредата е подпряна на повече от две опори, тя се явява статически неопределена. Разстоянието между опорите наричаме **поле**. Така, ако гредата има *r* на брой полета, тя ще бъде *r-1* пъти статически неопределена.

Такива греди се срещат в дългите корабни валолинии, в някои строителни конструкции и др.

Макар, че тези греди могат да се решат по класическия, силов метод, разледан по-горе, за тях са получени т.н. тримоментови уравнения, които опростяват и ускоряват значително изчисленията.

А) Тримоментово уравнение

Ще разгледаме непрекъсната греда, лежаща върху произволен краен брой опори, натоварена с известни товари фиг.10.20-а. Ще разгледаме случая, когато сечението на гредата е постоянно *(EJy=const).*



Фиг.10.20

Основната система избираме, като въвеждаме стави в гредата над всички междинни опори – фиг.10.20-б. По този начин всяко поле ще работи само за себе си и ще е статически определено.

Еквивалентната система е показана на фиг.10.20-в. Във всички междинни опори, отляво и дясно, въвеждаме неизвестни огъващи моменти $X_1, X_2,...,X_n$ *(n=1..r-1)*, представляващи реално съществуващите огъващи моменти в гредата.

Системата канонични уравнения по силовия метод ще се състои от *n* на брой уравнения. Уравнението с номер *k* (където *k* ще бъде номера на полето) има вида:

$$\delta_{\kappa,1}X_1 + ...+ \delta_{k,k-1}X_{k-1} + \delta_{k,k}X_k + \delta_{k,k+1}X_{k+1} + ...+ \delta_{k,n}X_n = -\delta_{k,p} \qquad 10.16)$$

От това уравнение виждаме, че диаграмата от единичния неизвестен момент $X_k=1$ участвува при преумножението на диаграмите на огъващите моменти във всички коефициенти. Но диаграмата от $X_k=1$ (фиг.10.20-г) се простира само на две съседни полета – на всички други участъци от гредата тя е равна на нула. Следователно, при преумножението различни от нула в това уравнение ще са само онези коефициенти, диаграмите на огъващите моменти на които се застъпват с диаграмата от $X_k=1$. Това са коефициентите $\delta_{k,k-1}$, $\delta_{k,k+1}$, $\delta_{k,p}$ и естествено $\delta_{k,k}$. Диаграмите от единичните неизвестни моменти $X_{k-1}=1$ и $X_{k+1}=1$ са показани на фиг. 10.20-*д,е.* Диаграмите на огъващите моменти от външния товар на тези полета са дадени на фиг. 10.20-*ж*.

Коефициентите ще получим по правилото на Верещагин, преумножавайки съответните диаграми:

$$\delta_{k,k}=\frac{1}{EJ_y}\left(\frac{1}{2}l_{k-1}.1.\frac{2}{3}.1+\frac{1}{2}l_k.1.\frac{2}{3}.1\right)=\frac{1}{3EJ_y}\left(l_{k-1}+l_k\right)$$

$$\delta_{k,k-1}=\frac{1}{EJ_y}\left(\frac{1}{2}l_{k-1}.1.\frac{1}{3}.1\right)=\frac{l_{k-1}}{6EJ_y}\qquad \delta_{k,k+1}=\frac{1}{EJ_y}\left(\frac{1}{2}l_k.1.\frac{1}{3}.1\right)=\frac{l_k}{6EJ_y}$$

$$\delta_{k,P}=\frac{1}{EJ_y}\left(\Omega_{k-1}.\frac{a_{k-1}}{l_{k-1}}+\Omega_k.\frac{a_k}{l_k}\right)=\frac{1}{EJ_y}\left(\frac{S_{k-1}}{l_{k-1}}+\frac{S_k}{l_k}\right)$$

(10.17)

В последния коефициент произведението от площта *($\Omega_{к-1}$)* на диаграмата на огъващия момент от външния товар по разстоянието от центъра на тежестта и до лявата опора *(a_{k-1})* на полето, както знаем, се нарича статичен момент на диаграмата *(S_{k-1})*. Аналогично $\Omega_{к-1}\ a_{k-1}= S_k$.- статичен момент на диаграмата на огъващия момент от външния товар на дясното поле относно дясната опора на полето.

Заместваме 10.17 в 10.16 и след елементарна преработка, получаваме:

$$X_{k-1}l_{k-1}+2X_k\left(l_{k-1}+l_k\right)+X_{k+1}l_k=-6\left(\frac{S_{k-1}}{l_{k-1}}+\frac{S_k}{l_k}\right)$$

(10.18)

За да избегнем неудобните индекси, ще означим моментите в трите опори като $X_{k-1}=M_л$, $X_k=M_{ср}$ и $X_{k+1}=M_д$, а дължините на полетата като $l_{k-1}=l_л$ и $l_k=l_д$, уравнение 10.18 придобива вида:

$$M_л l_л+2M_{ср}\left(l_л+l_д\right)+M_д l_д=-6\left(\frac{S_л}{l_л}+\frac{S_д}{l_д}\right)$$

(10.19)

Уравнение 10.19 е известно като **тримоментово уравнение на Клапейрон**.

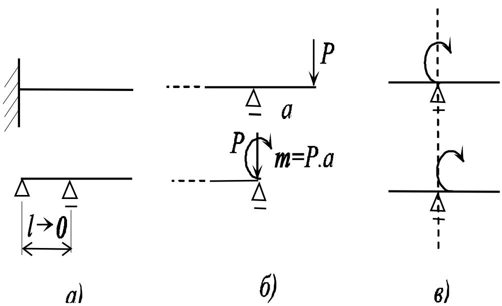
Такива тримоментови уравнения се записват за всички междинни опори на гредата, в резултат на което получаваме пълната система алгебрични уравнения за надопорните моменти.

Дясната част на уравнението зависи само от външния товар на полетата. За най-често срещаните случаи на натоварване на полетата, десните членове, които се наричат още **товарни членове**, могат да се намерят в таблици – [12].

След решаване на системата алгебрични уравнения, всяко поле от гредата се разглежда самостоятелно (като греда на две опори), натоварено освен със зададения товар и с така намерените надопорни моменти в двата края на полето.

Както виждаме, с помощта на тримоментовото уравнение задачата се решава значително по-леко в сравнение със силовия метод, тъй като отпада необходимостта от чертане на диаграми от единичните моменти и пресмятане на коефициентите на системата канонични уравнения. Тези изчисления са заложени предварително в самото уравнение.

Б) Някои особености на непрекъснатите греди



Фиг. 10.21

Ще обърнем внимание на три особености, които се срещат при решаването на конкретни задачи от непрекъснати греди.

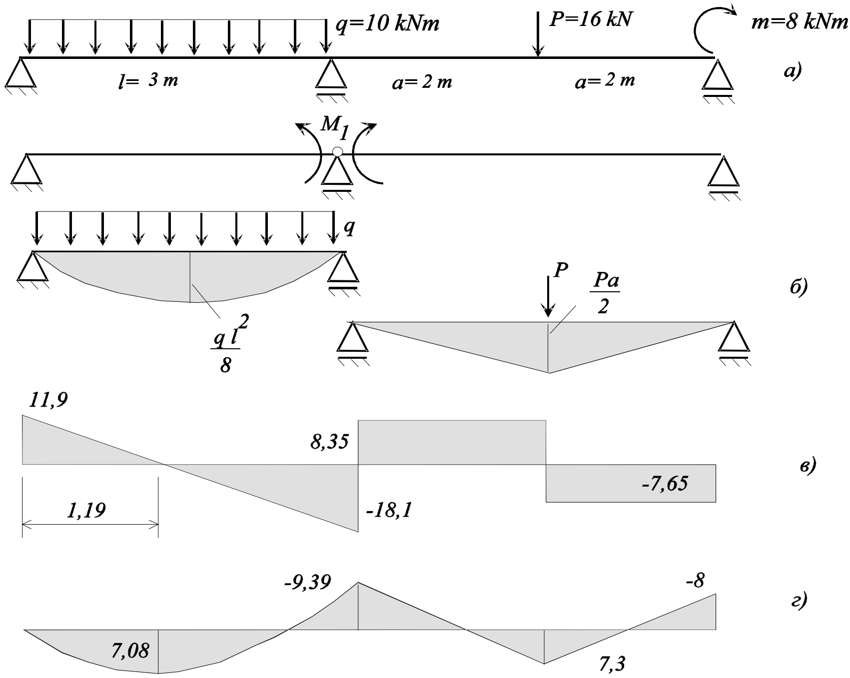
1) Ако края на гредата е запънат, същият се привежда към греда на две опори, стоящи на безкрайно близко разстояние една от друга – фиг.10.21-а. Така тези две опори осигуряват същите гранични условия в този край, като същевременно запъването отпада.

2. Ако гредата има конзолен край, силите върху конзолата се редуцират в опората, а самата конзола отпада – фиг. 10.21-б.

3. Ако в междинна опора действува външен момент, той се счита като момент, действуващ в края на едното от полетата – лявото или дясното – фиг.10.21-в.

В) Пример 10. 4. Да се определят диаграмите на разрезните усилия за непрекъсната греда с размери и натоварване съгласно фиг.10.22. Коравината на огъване е *EJy=const.*

Гредата е един път статически неопределена. За неизвестен момент приемаме надопорния момент в гредата на средната опора – M_1. На основание на натоварването във всяко поле, определяме статичните моменти на диаграмите на огъващите моменти от товарите в двете полета спрямо крайните опори:



Фиг.10.22

$$S_л = 2.\frac{2}{3}\frac{l}{2}\frac{ql^2}{8}\frac{l}{2} = \frac{ql^4}{24} \qquad S_д = 2\frac{1}{2}a\frac{Pa}{2}a = \frac{Pa^3}{2}$$

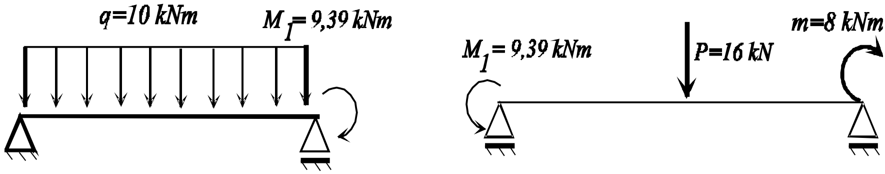
Знакът на статичния момент съвпада със знака на диаграмата. Заместваме в тримоментовото уравнение 10.19:

$$0.l + 2M_1(l + 2a) + (-m).2a = -6\left(\frac{ql^4}{24l} + \frac{Pa^3}{2.2a}\right)$$

Обърнете внимание, че моментът в най-дясната опора е отчетен в тримоментовото уравнение като момент от дясно (отрицателен), а не като външен товар.

След заместване на данните за размерите и натоварването получаваме $M_1 = -9{,}39$ *kNm.*

От тук нататък работим със всяко поле поотделно, добавяйки намерения момент като външен товар.

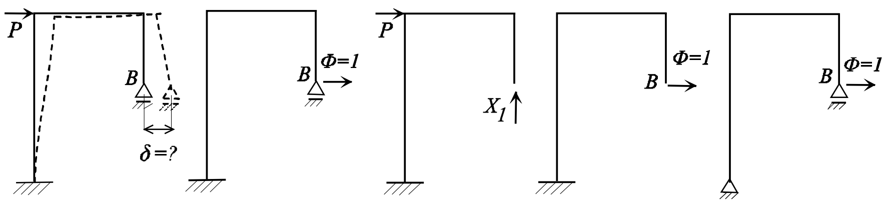


Фиг.10.23.

Всяка от гредите е статически определена. След решаването им, разрезните усилия придобиват вида, показан на фиг.10.22-в,г.

10.6. Определяне на премествания в статически неопределените системи

Универсален метод за определяне на премествания е методът на Максвел-Мор, разгледан в раздел 9.3. Ще използуваме този метод и за статически неопределени системи.



а) б) в) г) д)

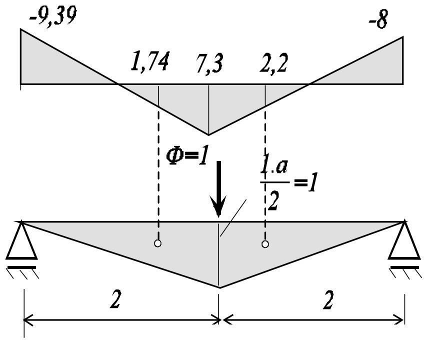
Фиг.10.24

Поставяме задачата да определим хоризонталното преместване на т.В от рамката, показана на фиг.10.24-а, която е един път статически неопределена.

Следвайки общата схема на решение по метода на Максвел-Мор, най-напред определяме огъващия момент от външния товар на рамката, за което очевидно ще е нужно разкриване на статическата неопределеност. След това в т.В на рамката по хоризонтално направление прилагаме единична фиктивна сила – фиг.10.24-б и определяме огъващия момент от тази сила. Преумножаваме диаграмите на двата момента по правилото на Верещагин, с което задачата е решена.

При тази схема на решение се вижда, че е необходимо двукратно разкриване на статическата неопределеност, защото рамката от фиг.10.24-б е също статически неопределена. Можем да избегнем второто разкриване на статическата неопределеност, ако фиктивната сила бъде приложена не върху зададената рамка, а върху еквивалентната система на зададената рамка, която е винаги статически определена. Една такава система е показаната схема в), върху която прилагаме единичната фиктивна сила – схема г). Но изходната рамка допуска и други основни (еквивалентни) системи, например схема д). Естествено, ще използуваме онази от тях, която е най-лека за решение.

Пример 10.5. Да се определи вертикалното преместване на приложната точка на силата *P* от гредата на фиг.10.22, ако е известно, че за гредата $EJy = 745,5\ Nm^2$.



Фиг.10.25

Диаграмата на огъващия момент от зададения товар за тази задача (фиг.10.22-г) беше получена чрез тримоментовото уравнение. За да получим преместването на приложната точка на силата *P*, можем да приложим в тази точка единична фиктивна сила в която и да е основна система, например основната система, с която е разкрита статическата неопределеност – фиг.10.22. Диаграмите, които трябва да преумножим, са показани на фиг. 10.25, където диаграма *My* е взета от фиг.10.22-г.

С прости геометрични изчисления определяме стойността на *My* над центровете на тежест на двата триъгълника от фиктивната диаграма. След преумножение, получаваме:

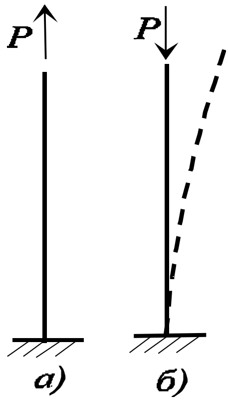
$$\delta = \frac{1}{EJ_y}\left(\frac{1}{2}2.1.1,74 + \frac{1}{2}.2.1.2,2\right) = \frac{3,94}{745,5} = 5,285.10^{-3}\ m$$

Гл.11. УСТОЙЧИВОСТ НА РАВНОВЕСИЕТО НА ДЕФОРМИРУЕМИ СИСТЕМИ

11.1. Понятие за устойчивост и неустойчивост. Задача на Ойлер.

А) Понятие за устойчивост и неустойчивост.

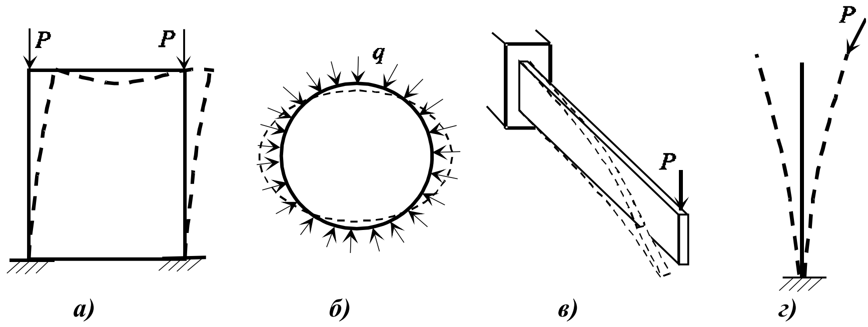
Да разгледаме следните две задачи – фиг.11.1: дълъг прът се товари на центричен опън (схема а) и центричен натиск (схема б). В първия случай прътът остава праволинеен до разрушението си. Във втория случай при някакво значение на силата ***P*** праволинейната форма на равновесие става невъзможна – при тази сила прътът внезапно се изкривява. Казваме, че прътът загубва **устойчивост**. Силата ***P***, при която става загубата на устойчивост, наричаме **критична сила**, а самото явление на изкривяване на пръта – **загуба на устойчивост.**



Фиг.11.1

Ще прецизираме понятието ‘устойчивост’. Ако в случай а) на фиг. 11.1 отклоним пръта от праволинейната форма на равновесие и го пуснем, той самостоятелно се връща към нея. Ако направим това за случай б), това ще бъде възможно само до определена стойност на натисковата сила Р. От тук може да се даде следното определение: Ако една система се връща сама в изходното си равновесно състояние, след като е била изведена от него, това равновесно състояние е устойчиво; ако системата не се връща в изходното си състояние, то е неустойчиво.

Склонност към загуба на устойчивост проявяват всички тънкостенни конструкции основно при натиск, но са възможни случаи на загуба на устойчивост и при огъване и усукване. На фиг. 11.2 са показани четири случая на загуба на устойчивост (с пунктир са показани новите положения на системите след загуба на устойчивост): а) равнинна рамка под действието на натискови сили; б) кръгла рамка (или цилиндрична черупка) под действието на външен натисков разпределен товар; в) тънкостенна греда при огъване в ранината на голямата и коравина; г) прът, подложен на натиск от следяща сила – сила, която през цялото време действува допирателно към деформираната ос на пръта. В последния случай се оказва, че при определена стойност на силата *P* прътът започва да извършва колебателни движения.



Фиг.11.2. Примери за загуба на устойчивост

Критичният товар означаваме с $P_{кр}$, $q_{кр}$ – това е големината на външния товар, при който конструкцията загубва устойчивост. Очевидно състояние на загуба на устойчивост е недопустимо за всяка конструкция. За тази цел въвеждаме **коефициент на сигурност ($n_{уст}$) против загуба на устойчивост**, с помощта на който се определя големината на допустимия товар *[P], [q]:*

$$[P] \leq \frac{P_{кр}}{n_{уст}} \qquad [q] \leq \frac{q_{кр}}{n_{уст}} \tag{11.1}$$

тук $P_{кр}$, $q_{кр}$ се изчисляват, а $n_{уст}$ е коефициент на сигурност, който се приема $(n_{уст}>1)$. Обръщаме внимание, че този коефициент на сигурност не е равен на коефициента на сигурност, с който се определят допустимите напрежения, въведен в гл.5. Обикновено коефициентът на сигурност при устойчивост е по-голям от коефициента на сигурност при оразмеряване по допустими напрежения.

Какво се случва, ако конструкцията загуби устойчивост ? Възможни са три поведения:

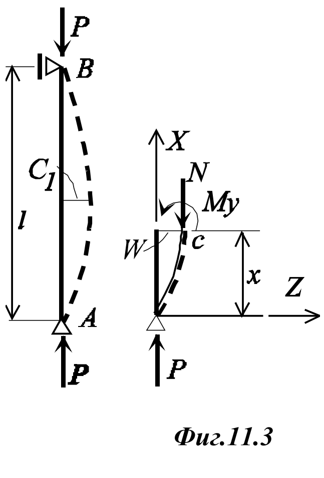
1) Конструкцията се разрушава. Този случай е най-неблагоприятен. Получава се, ако в резултат на загубата на устойчивост на даден елемент конструкцията се превръща в кинематично изменяема.

2) Конструкцията получава пластични деформации, но продължава да изпълнява предназначението си. Този случай се получава, когато товарът на деформиралия елемент се поема от другите елементи на конструкцията.

3) Конструкцията започва да извършва колебателни движения. Този случай се наблюдава при действие на следяща сила – фиг.11.2-г.

Б) Задача на Ойлер.

Ще разгледаме прът с постоянно напречно сечение, ставно закрепен в двата си края, натоварен на натиск – фиг.11.3. Ще считаме, че силата P е приложена строго центрично, прътът е с идеална права ос, материалът на пръта е хомогенен и е валиден закона на Хук.



Фиг.11.3

При тези условия няма причина прътът да се огъне, затова ние го огъваме по някакъв начин принудително (деформираната ос е показана на фигурата с пунктир) и търсим условията за съществуване на тази равновесна форма. Записваме условието за равновесие на елемент от пръта, съставяйки моментно уравнение на всички сили спрямо т.С. Получаваме:

$$M_y - PW = 0 \tag{11.2}$$

При малки напречни премествания на пръта е в сила опростеното диференциално уравнение на еластичната линия:

$$EJ_y W'' = -M_y \tag{11.3}$$

След заместване на 11.3 в 11.2, получаваме:

$$EJ_y W'' + PW = 0 \tag{11.4}$$

След полагането:

$$k^2 = \frac{P}{EJ_y} \tag{11.5}$$

диференциално уравнение 11.3 придобива вида:

$$W'' + \kappa^2 W = 0 \tag{11.6}$$

Това уравнение има решение:

$$W = C_1 \sin kx + C_2 \cos x \tag{11.7}$$

където C_1 и C_2 са интеграционни константи. Те могат да се определят от следните гранични условия:

1) При $x=0 \rightarrow W=0$, откъдето $C_2=0$.

2) При $x=l \rightarrow W=0$, откъдето получаваме:

$$C_1 \sin kl = 0 \tag{11.8}$$

Това алгебрично уравнение допуска две решения: Първото е $C_1=0$. Това решение, съвместно с полученото значение за константата $C_2=0$, превръща решението за преместването 11.7 в $W=0$, което противоречи на първоначалното допускане, че прътът е деформиран. Затова това решение не представлява интерес. Другото решение на 11.8 ще получим от:

$$\sin kl = 0 \tag{11.9}$$

Уравнение 11.9 има решение:

$$kl = n\pi \qquad (n = 0, 1, 2,..) \tag{11.10}$$

Заместваме 11.5 в 11.9 и получаваме:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EJ_y}{l^2} \tag{11.11}$$

Значение $n=0$ противоречи на условието, че $P>0$. Най-малкото значение на силата P, различно от нула, от 11.11 ще получим при $n=1$. Това е силата, при която е възможно решението 11.7, т.е прътът е в равновесие при малко отклонение от първоначалната си праволинейната форма. Тази сила наричаме **критична сила** и ще бъде:

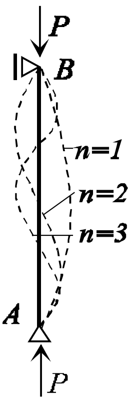
$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2} \tag{11.12}$$

Формата на огънатата ос на пръта при това ще бъде:

$$W = C_1 \sin kx = C_1 \sin \frac{n\pi}{l} x = C_1 \sin \frac{\pi}{l} x \tag{11.13}$$

Решението на тази задача е дадено за пръв път още през 1744 от Л. Ойлер, затова формула 11.2 се нарича **формула на Ойлер**. По онова време тънкостенни конструкции, подложени на натиск не са били все още използувани и намереното решение е било забравено. В края на 19 век и началото на 20 век, когато стоманата навлиза широко в промишлеността и строителството и започват да се строят големи метални мостови конструкции, проблемът с устойчивостта излиза на преден план. Историята ни дава много примери за разрушени мостови конструкции поради загуба на устойчивост. По статистически данни по това време почти всяка година в САЩ е падал по един мост (по данни на TV Discovery). През 1907 г. в провинция Квебек (Канада) на река Св. Лаврентий е паднал мост (с отвор 70 м) в момента на преминаване на влак, вследствие на което загиват стотици пътници. Всичко това е дало силен тласък на теорията за устойчивост на деформируеми системи.

По-горе ние предположихме, че сме извели пръта от праволинейната форма на равновесие принудително и търсим условията за равновесие на изкривената форма. Но за реално съществуващите пръти такива сили не действуват и въпреки това прътите губят устойчивост. Защо ? Отговорът е, че реално всички пръти се намират в тези условия на леко предварително изкривяване. На практика няма идеално прав прът, не може да има идеално центрично приложена сила на натиск.



Фиг.11.4

Решението на Ойлер има известни слабости. От решенията 11.11 и 11.13 следва, че са възможни и други равновесни състояния. При *n=2* получаваме:

$$P = \frac{4\pi^2 EJ_y}{l^2}, \quad W = C_1 \sin \frac{2\pi}{l} x \tag{11.14}$$

Формите на огънатата ос на пръта при *n=1,2* и *3* са показани на фиг.11.4. Но това означава, че след достигане на първата критична сила, определена по формула 11.12, прътът се връща в изходното си състояние и след достигане на втората критична сила се изкривява наново. Това естествено противоречи на здравия смисъл и опита. Друга слабост на полученото решение е, че не е известна константата C_1, която за първата критична сила има смисъл на напречното преместване в средата на пръта.

Указаните слабости в решението се дължат на факта, че при извода на диференциалното уравнение 11.6 за устойчивостта, беше използувано опростеното диференциално уравнение на еластичната линия 11.3, което е валидно само за малки премествания. В действителност, след първоначалното изкривяване на пръта, деформациите му продължават да растат и могат да бъдат определени само след използуване на пълното диференциално уравнение на еластичната линия 7.18. Тогава диференциалното уравнение на равновесие на пръта придобива вида:

$$EJ_y \frac{W''}{\left(1+\left(W'\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + PW = 0 \tag{11.15}$$

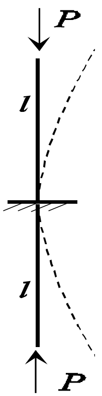
Това диференциално уравнение е много по-трудно решимо. Но в началния момент на деформиране на пръта (когато преместванията са малки) двете уравнения (11.4 и 11.15) дават едно и също решение. Поради това решението на Ойлер, даващо значението на критичната сила в началото на деформирането на пръта, е напълно справедливо.

11.2. Зависимост на критичната сила от начините на закрепване на пръта.

А) Често срещани случаи

По-горе разгледахме прът, ставно закрепен в двата си края, при което огъването на напречните сечения на пръта става около ос Y. Но са възможни и други случаи на закрепване на пръта. Универсален метод за определяне на критичната сила за всеки отделен случай е да се състави и реши съответното диференциално уравнение. За някои случаи обаче тази задача може да бъде решена на основание сравнението на деформираната ос на пръта с вече разледания случай (фиг.11.3), който ще наречем случай на Ойлер.

Да разгледаме случая, когато прътът е запънат в единия край, а другият е свободен - фиг.11.5. Ако мислено си представим прът с удвоена дължина, запънат по средата, при загуба на устойчивост той би се огънал по същия начин, както прътът от фиг.11.3. Следователно критичната сила за този случай може да се получи от намерената вече формула 11.12 за предидущия случай, ако в нея вместо дължината l заместим $2l$:



Фиг.11.5

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(2l)^2} \tag{11.16}$$

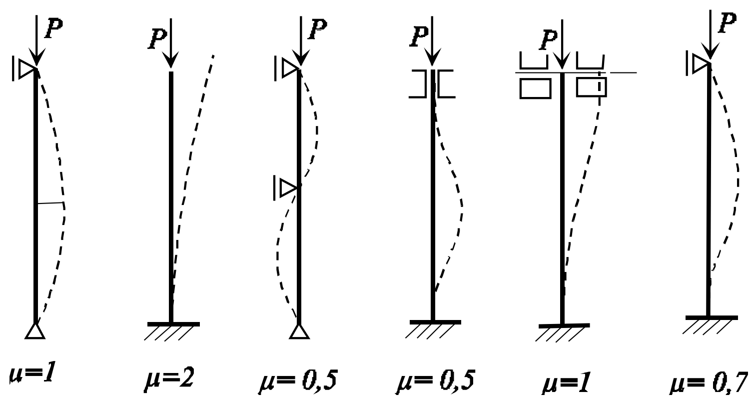
Формулите за критичните сили за тези два случая можем да запишем с един израз:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(\mu l)^2} \tag{11.17}$$

където μ – безразмерен коефициент, зависещ от начина на закрепване на пръта. За ставно закрепения в двата си края прът (фиг.11.3) - $\mu=1$, а за пръта от фиг.11.5 – $\mu=2$. Този коефициент наричаме **коефициент на редуцираната дължина** на пръта, защото произведението μl представлява някаква нова, редуцирана дължина.

За случая от фиг.11.3 доказахме, че прътът се изкривява по една полувълна от синусоидата – виж формула 11.13. От тук може да се формулира следното практично правило за определяне на коефициента μ: Коефициентът μ показва каква част от огънатата ос на пръта се нанася в половин вълна от синусоидата. За схемата на закрепване на фиг.11.3 прътът се нанася веднъж в половин вълна от синусоидата, следователно $\mu=1$, а за схемата на закрепване съгласно фиг.11.5 огънатата ос на пръта се нанася два пъти в половин вълна от синусоидата, следователно коефициентът $\mu=2$.

На фиг.11.6 са показани няколко често срещани случая на закрепване на пръта и значението на коефициента μ, определен чрез това правило. За последния случай е необходимо обаче специално изследване.



Фиг. 11.6

Б) Случай, когато единият край е запънат, а другият – подпрян.

Ако диференцираме двукратно диференциално уравнение 11.6, ще получим:

$$W^{IV} + k^2 W^{II} = 0 \tag{11.18}$$

Това диференциално уравнение е по-общо в сравнение с 11.6. То има решение:

$$W = C_1 + C_2 x + C_3 \sin kx + C_4 \cos kx \tag{1.19}$$

От тук определяме първата и втората производна на преместването:

$$W' = C_2 + C_3 k \cos kx - C_4 k \sin kx$$

$$W'' = -C_3 k^2 \sin kx - C_4 k^2 \cos kx \tag{11.20}$$

За последния случай от фиг.11.6 (единият край на пръта – запънат, а другият – подпрян) граничните условия за определяне на интеграционните константи са:

1. При $x=0 \rightarrow W=0 \rightarrow C_1+C_4=0$
2. При $x=0 \rightarrow W'=0 \rightarrow C_2+C_3 k=0$
3. При $x=l \rightarrow W=0 \rightarrow C_1+C_2 l+C_3 \sin kl+C_4 \cos kl=0$
4. При $x=l \rightarrow My=0 \rightarrow W''=0 \rightarrow C_3 \sin kl+C_4 \cos kl=0$

Получените алгебрични уравнения могат да се запишат в матричен вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 1 & l & \sin kl & \cos kl \\ 0 & 0 & \sin kl & \cos kl \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = 0 \tag{11.21}$$

Системата 11.21 е хомогенна и следователно за ненулевото решение е необходимо да бъде изпълнено условието:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 1 & l & \sin kl & \cos kl \\ 0 & 0 & \sin kl & \cos kl \end{vmatrix} = 0 \tag{11.22}$$

След развитие на детерминантата, получаваме:

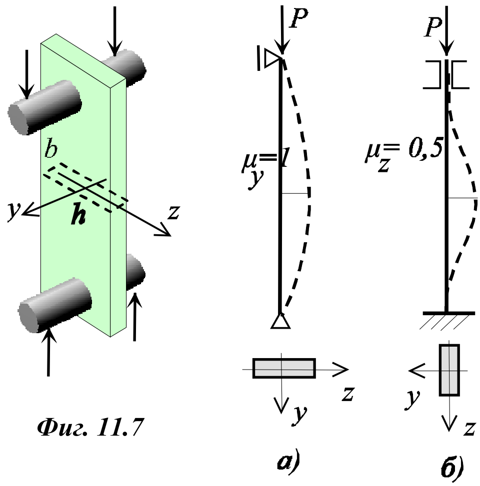
$$tgkl = kl \tag{11.23}$$

Най-малкият положителен корен на това трансцендентно уравнение е $kl=4,493$ (може да се получи числено). С помощта на 11.5 получаваме:

$$k^2l^2 = \frac{P}{EJ_y}l^2 = 4{,}49^2 \quad \rightarrow \quad P_{кр} = \frac{4{,}49^2\,EJ_y}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ_y}{\left(\dfrac{\pi}{4{,}49}l\right)^2} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(0{,}7l)^2} \tag{11.23}$$

т.е., коефициентът на приведената дължина на пръта за този случай е $\mu=0,7$

В) Случай на различно закрепване на пръта в двете инерционни равнини.



Фиг. 11.7

В горните случаи предполагахме, че при загуба на устойчивост прътът се огъва около ос y на напречното сечение. Ако прътът е закрепен в двете инерционни равнини по един и същи начин, това ще бъде вярно само тогава, когато инерционният момент $Jy<Jz$ (виж формула 11.17). Ако обаче прътът е закрепен по различен начин в двете инерционни равнини, подобно на често срещания случай, показан на фиг. 11.7, се налага проверка на критичните сили в двете равнини. Тези критични сили ще бъдат:

$$P_{кр,y} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(\mu_y\, l)^2} \qquad P_{кр,z} = \frac{\pi^2 EJ_z}{(\mu_z\, l)^2} \tag{11.24}$$

Тук индексите y и z следва да се считат като оси, около които става завъртването на напречното сечение при загуба на устойчивост. Забележете, че при различно закрепване се променят коефициентите на приведените дължини. Меродавна от двете критични сили ще бъде онази критична сила, която е по-малка.

От раздела за геометрични характеристики на равнинни фигури знаем (формули 2.10), че:

$$J_y = Fi_y^2 \qquad J_z = Fi_z^2 \tag{11.25}$$

където i_y, i_z - инерционни радиуси. Заместваме 11.25 в 11.24:

$$P_{кр,y} = \frac{\pi^2 EF}{\left(\frac{\mu_y l}{i_y}\right)^2} \qquad P_{кр,z} = \frac{\pi^2 EF}{\left(\frac{\mu_z l}{i_z}\right)^2}$$

(11.26)

Полагаме:

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} \qquad \lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_z}$$

(11.27)

Величините λy и λz (безразмерни) наричаме **стройности** около съответните оси. От 11.27 виждаме, че стройността на един прът зависи от геометричните му размери (дължина, напречно сечение) и от начина на закрепване (коефициента μ). За натиснати колони се допуска максимална стройност до 180 единици. В природата съществуват растения (бамбукови дървета, стъбло на ръж) с доста по-високи стройности.

Като използуваме 11.27, формули 11.26 придобиват вида:

$$P_{кр,y} = \frac{\pi^2 EF}{\lambda_y^2} \qquad P_{кр,z} = \frac{\pi^2 EF}{\lambda_z^2}$$

(11.28)

Тези формули за критичните сили показват, че по-малка ще бъде критичната сила в онази равнина, в която стройността е по-голяма.

От друга страна няма никаква необходимост в едната равнина критичната сила да е по-голяма отколкото в другата равнина. От 11.28 виждаме, че за да бъде прътът равноустойчив в двете равнини, е необходимо да се изпълни условието:

$$\lambda_y = \lambda_z \quad \rightarrow \quad \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{\mu_z l}{i_z} \quad \rightarrow \quad \frac{\mu_y}{i_y} = \frac{\mu_z}{i_z}$$

(11.29)

Така например за случая, показан на фиг.11.7 имаме:

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}; \quad i_z = ... = \frac{b}{\sqrt{12}}; \quad \mu_y = 1; \quad \mu_z = 0{,}5$$

След заместване на тези значения в 11.22, ще получим, че $h=2b$ – условие за равноустойчивост на пръта в двете равнини. Този случай има място в мотовилките на двигатели с вътрешно горене, ако са изработени с правоъгълно напречно сечение.

11.3. Граница на приложение на формулата на Ойлер. Диаграма на критичното напрежение.

А) Критично напрежение

До момента на загуба на устойчивост прътът е с права ос и следователно напрежението в него може да се определи по формулата за центричен опън/натиск. Напрежението в момента на загуба на устойчивост наричаме **критично напрежение**. То ще бъде равно на:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \tag{11.30}$$

Ако за $P_{кр}$ използваме формула 11.28 (като предполагаме, че $P_{кр,y} < P_{кр,z}$), ще получим:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{11.31}$$

Познаването на критичното напрежение е важно, защото чрез него можем да определим критичната сила – виж формула 11.30.

Б) Граница на приложение на формулата на Ойлер

Формулата на Ойлер беше изведена в предположение, че е валиден закона на Хук. Това означава, че и критичното напрежение, определено съгласно 11.31, не бива да превишава границата на пропорционалност при натиск $\sigma_{p,н}$, т.е.:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{p,н}$$

От тук следва:

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{p,н}}} \tag{11.32}$$

Величината от дясно зависи само от материала на пръта и наричаме **гранична стройност**, т.е:

$$\lambda_{гр} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{p,н}}} \tag{11.33}$$

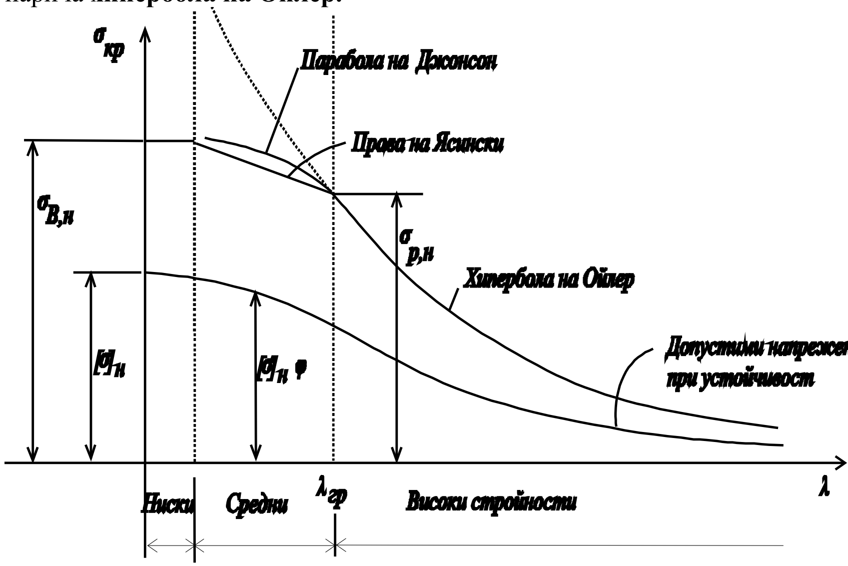
Тогава 11.32 става:

$$\lambda \geq \lambda_{гр} \tag{11.34}$$

Условие 11.34 представлява условието за валидността на формулата на Ойлер. От нея следва, че за да сме сигурни, че може да се приложи формулата на Ойлер, действителната стройност на пръта трябва да е по-голяма или равна на граничната стройност, зависеща само от материала на пръта (формула 11.33). Ако в 11.33 заместим данните за нисковъглеродна стомана, ще получим, че за нея граничната стройност е около 100.

В) Диаграма на критичното напрежение

Формулата за критичното напрежение 11.31 по отношение на λ представлява една хипербола, показана на фиг.11.8. Тази хипербола се нарича **хипербола на Ойлер.**



Фиг.11.8. Диаграма на критичното напрежение

Хиперболата на Ойлер дава правилното критичното напрежение само над граничната стройност на пръта, когато $\lambda > \lambda_{гр}$ – областта на високите стройности. В случай, че действителната стройност на пръта е по-малка от граничната стройност, хиперболата на Ойлер е невалидна. Ако в тази област прътът загуби устойчивост, огъването на пръта е съпроводено с поява на пластични деформации.

Устойчивост при наличие на пластични деформации противоречи на определението за устойчивост, съгласно което прътът се връща в изходното си състояние, ако бъде изведен от него. Но при пластични деформации това е невъзможно. Ето защо в областта на средните стройности, когато са възможни пластични деформации при натиск, критичната сила следва да се възприема като сила, удържана от пръта при малки отклонения от праволинейната форма на равновесие.

В същото време в областта на ниските стройности (много къси и дебели пръти), когато няма опасност от загуба на устойчивост въобще, под критично напрежение трябва да разбираме границата на разрушение при натиск $\sigma_{B,н}$ – фиг.11.18. Така неизяснено остава критичното напрежение в зоната на средните стройности. За тази зона съществуват различни предложения за изчисляване на критичното напрежение. В практиката се е наложила формулата на **Ясински - Тетмайер**, която има вида:

$$\sigma_{кр} = A(1 - B\lambda) \qquad (11.35)$$

където коефициентите A и B зависят от вида на материала. Например за нисковъглеродна стомана $A=304\ Mpa,\ B=368.10^{-5}$.

Съществуват и други формули за определяне на критичното напрежение, като тези на Джонсон, Карман и др.

11.4. Оразмеряване на натиснати пръти. ‘φ’ метод.

Оразмеряването на натиснати пръти можем да извършим по три начина – чрез формулата на Ойлер (за областта на високите стройности), чрез формулата на Ясински- Тетмайер (за областта на средните стройности) и чрез т.н. ‘φ’ метод – за всички стройности.

А) Оразмеряване чрез формулата на Ойлер.

Като използуваме 11.1 и 11.17, можем да запишем:

$$[P] \le \frac{P_{кр}}{n_{уст}} = \frac{\pi^2 EJ_y}{n_{уст}(\mu l)^2} \qquad (11.36)$$

От тук определяме необходимия инерционен момент:

$$J_y \ge \frac{[P] n_{уст} (\mu l)^2}{\pi^2 E} \qquad (11.37)$$

Съобразно вида на сечението избираме съответния размер или номер на профила.

Тъй като формулата на Ойлер е използувана ‘на доверие’, защото предварително не знаем каква е стройността на пръта, задължително проверяваме дали действителната стройност на пръта е по-голяма от граничната стройност на материала формула 11.34. (След определяне на размерите на напречното сечение действителната стройност може да бъде изчислена). Ако се окаже, че условие 11.34 не се изпълнява, намереният размер е невалиден. Оразмеряването следва да извършим по следващите методи.

Б) Оразмеряване чрез формулата на Ясински -Тетмайер.

Въвеждаме **допустимо напрежение при устойчивост** като:

$$[\sigma]_{уст} = \frac{\sigma_{кр}}{n_{уст}} \tag{11.38}$$

Оразмеряването извършваме както при центиричен натиск:

$$F \geq \frac{P}{[\sigma]_{уст}} = \frac{Pn_{уст}}{\sigma_{кр}} \tag{11.39}$$

Тук P – действуващата натискова сила, $\sigma_{кр}$ - критично напрежение, което определяме по формула 11.35.

Тъй като критичното напрежение зависи от стройността, която пък зависи от сечението, решението на 11.39 става итерационно, докато допустимата сила на приетия прът стане по-голяма от зададената сила. Допустимата сила се получава от 11.39:

$$[P] = F\frac{\sigma_{кр}}{n_{уст}} \geq P \tag{11.40}$$

В) Оразмеряване по 'φ' метода.

Този метод прилича много на предидущия. Разликата се състои в това, че допустимото напрежение при устойчивост се определя по израза:

$$[\sigma]_{уст} = [\sigma]_{н}\varphi \tag{11.41}$$

където $[\sigma]_н$ – допустимо напрежение при натиск за материала, а коефициентът φ се нарича **коефициент на снижение на допустимите напрежения**. При това $\varphi \leq 1$! Този коефициент е табулиран и се избира в зависимост от стройността на пръта и вида на материала - виж [8],[12]. Изменението на допустимото напрежение при устойчивост в зависимост от стройността на пръта е показано на фиг.11.8.

Оразмеряването извършваме по формулата:

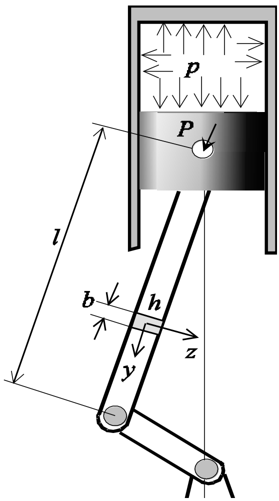
$$F \geq \frac{P}{[\sigma]_{уст}} = \frac{P}{[\sigma]_{н}\varphi} \tag{11.42}$$

Тъй като коефициентът φ зависи от стройността, а стройността зависи от напречното сечение, формула 11.42 се прилага итерационно. Приемаме някакъв коефициент φ (например $\varphi=0,5$), определяме сечението, определяме действителната стройност, определяме действителния коефициент φ за намерената стройност и проверяваме допустимата сила:

$$[P] = F[\sigma]_{н}\varphi \geq P \tag{11.43}$$

Ако се окаже, че допустимата сила е по-голяма от зададената, профилът е удачно подбран. В противен случай увеличаваме напречното сечение, докато се изпълни условие 11.42.

Г) Пример 11.1. Да се определят размерите на сечението (правоъгълно) на мотовилката на коляно-мотовилков механизъм (Фиг.11.9) при шест кратна сигурност против загуба на устойчивост, ако максималната сила на натиск е $P=180\ kN$, $l=1,3\ m$, а за материала на мотовилката (Ст 5) $E=2.10^{11}\ Pa$ и $\sigma_{-s} = 270\ MPa$.



Фиг. 11.9

В раздел 11.2-в доказахме, че при закрепване, каквото има мотовилката (в равнината на движение – ставно закрепване в двата края, а в перпендикулярната равнина – запъване) и при правоъгълно напречно сечение, за осигуряване на равноустойчивост в двете равнини е необходимо да бъде изпълнено условието $h=2b$, където $b,\ h$ – размери на напречното сечение на мотовилката. При това положение остава да определим единият от размерите. Най-напред ще оразмерим по формулата на Ойлер – формула 11.37:

$$J_y \geq \frac{[P]n_{уст}(\mu l)^2}{\pi^2 E} = \frac{180.10^3.6.(1.1,3)^2}{\pi^2 2.10^{11}} = 92,5.10^{-8}\ m^2$$

От тук определяме размера b:

$$J_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{8}{12}b^4 \quad \rightarrow \quad b = \sqrt[4]{\frac{12J_y}{8}} = \ldots = 3,43.10^{-2}\ m$$

Определяме действителната стройност на мотовилката

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{\mu_y l}{h}\sqrt{12} = \frac{1.1,3}{2.3,43.10^{-2}}\sqrt{12} = 68,2$$

Тази стройност е доста по-малка от граничната стройност за стомана и следователно така определените размери не са валидни. Ще оразмерим мотовилката по 'φ' метода. За начални размери избираме увеличените размери на мотовилката, получени по формулата на Ойлер. Приемаме *b=5 cm*, *h=10 cm*. Стройността на мотовилката ще бъде:

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{h}\sqrt{12} = \frac{1.1{,}3}{10.10^{-2}}\sqrt{12} = 45$$

За стройност 45 единици и материал Ст 5 от таблиците за коефициента φ [12], определяме $\varphi=0{,}875$.

По формула 11.42 определяме допустимата сила на натиск:

$$[P] = F[\sigma]_н\varphi = F\frac{\sigma_s}{n_{уст}}\varphi = 5.10.10^{-4}\,\frac{270.10^6}{6}\,0{,}875 = 197\ kN$$

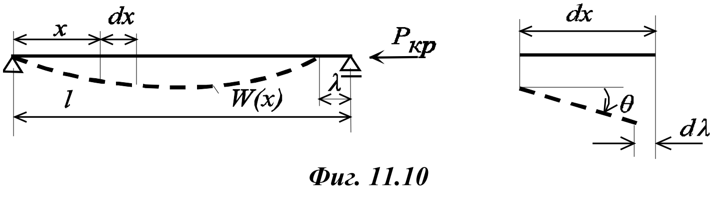
Тази сила е по-голяма от максималната сила, действуваща върху мотовилката и следователно така определените размери могат да се приемат за окончателни.

Допустимата сила можем да изчислим и чрез критичното напрежение – формула 11.40. Ако приемем за критичното напрежение формулата за нисковъглеродна стомана, при стройност λ=45 от 11.45 ще получим $\sigma_{кр}=304(1-368.10^{-5}.45)=254\ Mpa$. Допустимата сила по 11.40 ще бъде:

$$[P] = F\frac{\sigma_{кр}}{n_{уст}} = 5.10.10^{-4}\,\frac{254.10^6}{6} = 212\ kN$$

11.5. Енергетичен метод за определяне на критичната сила.

По-горе видяхме как се определя критичната сила за пръти с постоянно напречно сечение, натоварени с постоянна натискова сила. Ако сечението на пръта или натисковата сила в пръта са променливи, задачата се усложнява извънредно. Същото усложнение се получава, ако прътът има повече от един участък. Аналитичните решения на съответните диференциални уравнения в тези случаи водят до математически затруднения и не са практически пригодни. Потърсени са други, приближени, но по-леки за прилагане методи. Такъв е енергетичния метод, който ще разгледаме.



Фиг. 11.10

В основата на метода лежи предположението, че в момента на загуба на устойчивост (в момента на деформирането на пръта) работата, която извършва критичната сила се превръща изцяло в потенциална енергия на деформация на огънатия прът. За извода на формулата за критичната сила ще разгледаме прът, ставно подпрян в двата си края – фиг.11.10.

Работата на критичната сила ще бъде:

$$A = P_{кр}.\lambda \tag{11.44}$$

Тук липсва множител ½ , защото загубата на устойчивост става мигновено, при постоянна сила, равна на критичната сила.

Нека потенциалната енергия от огъването на пръта бъде U. Приравняваме $A=U$ и получаваме:

$$P_{кр} = \frac{U}{\lambda} \tag{11.45}$$

Това е обща формула за определяне на критичната сила. За всеки частен случай се определят U и λ.

В конкретния случай потенциалната енергия от огъването на пръта ще бъде:

$$U = \int_l \frac{M_y^2}{2EJ_y}dx = \int_l \frac{(-EJ_y W'')^2}{2EJ_y}dx = \frac{1}{2}\int_l EJ_y (W'')^2 dx \tag{11.46}$$

Тук сме използували факта, че при малки премествания огъващият момент може да се изрази чрез втората производна на преместването (виж уравнение 7.19).

За определяне на преместването на приложната точка на силата, разглеждаме диференциален елемент – фиг.11.10. Скъсяването $d\,\lambda$ на този елемент идва от завъртването на елемента и ще бъде:

$$d\lambda = dx - dx\cos\theta = dx(1-\cos\theta) = dx(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2} - ..) \approx \frac{\theta^2}{2}dx$$

Тук сме разложили $cos\theta$ в степенен ред и сме взели само първите два члена от разложението, поради това, че ъгълът θ е малък.

Пълното скъсяване λ ще бъде:

$$\lambda = \int_l d\lambda = \int_l \frac{\theta^2}{2}dx = \frac{1}{2}\int_l (W')^2 dx \tag{11.47}$$

Заместваме 11.46 и 11.47 в 11.45 и получаваме:

$$P_{кр} = \frac{\int\limits_l EJ_y (W'')^2 dx}{\int\limits_l (W')^2 dx} \qquad (11.48)$$

Разгледаният метод и получената формула 11.48 са предложени от **С. Тимошенко** в началото на миналия век. Формулата може да се използува и при променлива коравина на огъване на пръта.

Във формула 11.48 има обаче определена неяснота – откъде се взема функцията за преместването W ? Тимошенко е показал, че в качеството на W може да се вземе произволна функция, удовлетворяваща поне геометрическите условия на закрепване на пръта. Ако функцията удовлетворява и силовите условия, тогава точността на метода нараства.

Пример 11.2. Да се определи критичната сила за пръта от фиг.11.10 чрез енергетичния метод, при постоянна коравина на огъване ($EJy = const$).

За целта в намерената формула 11.48 следва да заместим някаква функция за W, удовлетворяваща условията на закрепване на пръта. Такава функция е функцията:

$$W_{(x)} = C\sin\frac{\pi x}{l} \;\rightarrow\; W' = C\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi x}{l} \;\rightarrow\; W'' = -C\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{l} \qquad (а)$$

Заместваме (а) в 11.48 и получаваме:

$$P_{кр} = \frac{EJ_y \int\limits_l C^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \sin^2\frac{\pi x}{l}dx}{\int\limits_l C^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cos^2\frac{\pi x}{l}dx} = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}\frac{\int\limits_l \sin^2\frac{\pi x}{l}dx}{\int\limits_l \cos^2\frac{\pi x}{l}dx} = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}.1 = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2} \qquad (б)$$

За критичната сила получихме точното значение, определено по-горе в 11.1 чрез решаване на диференциалното уравнение 11.6. Причината за това е, че използувахме истинската функция 11.13 за огънатата ос на пръта, получена от решението на диференциалното уравнение.

Нека сега приемем друга функция за преместването, удвовлветвояваща само геометрическите условия на закрепване, например:

$$W_{(x)} = Cx(x - l) \;\rightarrow\; W' = C(2x - l) \;\rightarrow\; W'' = 2C \qquad (в)$$

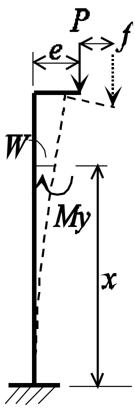
Наистина, тази функция удовлетворява геометричните условия на закрепване на пръта $W(0)=W(l)=0,$ но не удовлетворява силовите условия, тъй като втората производна, която е пропорционална на огъващия момент, е константа, докато реално това не е така. Заместваме (в) в 11.48 и получаваме:

$$P_{кр} = \frac{EJ_y \int_l 4C^2 dx}{\int_l C^2(4x^2 - 4xl + l^2)dx} = \frac{4EJ_y C^2 l}{C^2 l^3 / 3} = \frac{12EJ_y}{l^2} \quad \text{(г)}$$

В сравнение с точното значение (б), сега получихме около 20 % завишение на критичната сила. Причината е в много грубото приближение за функцията W. Доста по-добро приближение се получава при заместване на преместването с функция, която се получава от равномерно разпределен товар (собственото тегло на пръта).

11.6. Нецентричен натиск/опън на гъвкав прът

Натисковата сила никога не може да бъде приложена строго центрично. Ако при това прътът е с малка коравина на огъване, могат да се получат някои нови ефекти, които ще разгледаме.



На фиг.11.11 е показана колона, натисната от сила P с определен ексцентрицитет e. При малки напречни премествания от огъването на колоната ще бъде в сила диференциалното уравнение:

$$EJ_y W'' = -M_y \quad (11.49)$$

Огъващият момент на разстояние x (отчитайки огъването), ще бъде:

$$M_y = -P(e + f - W) \quad (11.50)$$

От тези две уравнения получаваме следното диференциално уравнение:

Фиг. 11.11

$$EJ_y W'' = P(e + f - W) \quad \rightarrow \quad W'' + k^2 W = P(e + f) \quad (11.51)$$

където

$$k^2 = \frac{P}{EJ_y} \quad (11.52)$$

Решението на 11.51 има вида:

$$W = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + (e + f) \qquad (11.53)$$

Граничните условия за определяне на неизвестните константи (C_1, C_2 и f) са:

1. $x=0 \rightarrow W=0 \rightarrow C_2= -(e+f)$
2. $x=0 \rightarrow W'=0 \rightarrow C_1=0$
3. $x=l \rightarrow W=f \rightarrow f = -(e+f)\cos kl + (e+f)$

От последното уравнение определяме:

$$f + e = \frac{e}{\cos kl}$$

Заместваме намерените константи в 11.53. Получаваме:

$$W = e\frac{1 - \cos kx}{\cos kl} \qquad (11.54)$$

От тук виждаме, че ако знаменателят се анулира, преместванията клонят към безкрайност. Знаменателят ще се анулира, ако:

$$kl = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad (kl)^2 = \frac{\pi^2}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{P}{EJ_y}l^2 = \frac{\pi^2}{4} \quad \rightarrow \quad P = \frac{\pi^2 EJ_y}{(4l)^2}$$

Това е точно равно на критичната сила на пръта, което следваше да се очаква.

Уравнение 11.54 показва, че в този случай преместването не зависи линейно от силата, както се получаваше в коравите греди. При сила, близка до критичната, преместванията нарастват силно, а от там огъващите моменти и напреженията.

Огъващият момент ще получим от 11.49 и 11.54:

$$M_y = -EJ_y W'' = \ldots = -Pe\frac{\cos kx}{\cos kl} \qquad (11.55)$$

Максималната стойност на момента ще бъде при *x=0:*

$$M_{y,\max} = -Pe\frac{1}{\cos\sqrt{\dfrac{Pl^2}{EJ_y}}} \qquad (11.56)$$

Когато коравината на огъване на гредата е голяма, знаменателя клони към единица и огъващият момент е равен на *(–Pe)*. Когато гредата е гъвкава, знаменателят може да стане много малък и моментът, респективно напреженията ще нараснат силно, независимо от големината на ексцентрицитета.

Ако в тази задача сменим знака на силата, ще получим нецентричен опън на гъвкава греда. Тогава диференциално уравнение 11.51 добива вида:

$$W'' - k^2 W = -P(e + f) \qquad (11.57)$$

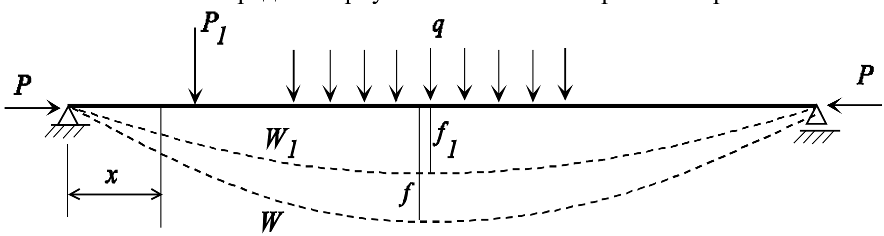
Това диференциално уравнение се решава при същите гранични условия, но решението (и изводите) се променя коренно - във всички получени решения вместо тригонометричен косинус заместваме хиперболичен косинус. В частност за преместването от 11.54 получаваме:

$$W = e\frac{1 - chkx}{chkl} \qquad (11.58)$$

От тук следва, че при нарастване на силата P знаменателят и числителят се изравняват и максималното преместване не може да превиши ексцентрицитета e.

11.7. Огъване на греда при наличие на осова сила

Тук ще отчетем едновременното влияние на напречните сили и натисковата сила в гредата върху големината на напречните премествания.



Фиг. 11.12

Разглеждаме греда с постоянно напречно сечение, натоварена едновременно с напречен товар и натискова сила – фиг. 11.12. С W_1 означаваме напречното преместване само от напречните сили, а с W – преместването от напречните сили и осовата сила.

За W_1 при малки премествания е в сила диференциалното уравнение на еластичната линия:

$$EJ_y W_1'' = -M_1 \qquad (11.59)$$

където M_1 е моментът само от напречните сили.

Ако вземем под влияние допълнителния огъващ момент на натисковата осова сила, преместването ще бъде *W,* а огъващият момент $M_1 + P.W$. Диференциалното уравнение за *W* ще бъде:

$$EJ_y W'' = -(M_1 + P.W) \tag{11.60}$$

Или:

$$W'' + k^2 W = -\frac{M_1}{EJ_y} \tag{11.61}$$

където:

$$k^2 = \frac{P}{EJ_y} \tag{11.62}$$

След двукратно диференциране на 11.61, получаваме:

$$W^{IV} + k^2 W'' = \frac{q}{EJ_y} \tag{11.63}$$

Решението на това диференциално уравнение при съответните гранични условия дава отговор на поставената задача. За аналитично изследване обаче това уравнение е неудобно поради големия брой интеграционни константи.

Ще покажем приближен способ за решаване на проблема.

Заместваме M_1, определен от 11.59 в 11.60. Получаваме:

$$EJ_y W'' = EJ_y W_1'' - P.W \tag{11.64}$$

Сега правим важно допускане. Считаме, че формите на огънатата ос на гредата без и с осовата сила качествено съвпадат (виж пунктираните линии на фиг.11.12), т.е. те могат да се опишат с уравненията:

$$W_1 = f_1 \sin\frac{\pi}{l}x \qquad W = f\sin\frac{\pi}{l}x \tag{11.65}$$

където f_1, f – стрелки на преместванията без и с отчитане на осовата сила.

Изчисляваме вторите производни и заместваме в 11.65. Получаваме:

$$EJ_y f\frac{\pi^2}{l^2} = EJ_y f_1\frac{\pi^2}{l^2} + Pf \tag{11.66}$$

От тук определяме максималното преместване на гредата *(f)* с отчитане влиянието на натисковата сила :

$$f\left(1-\frac{P}{EJ_y\frac{\pi^2}{l^2}}\right)=f_1 \quad \rightarrow \quad f=\frac{f_1}{1-\frac{P}{P_{кр}}} \tag{11.67}$$

Полученият израз показва, че натисковата сила увеличава преместванията, получени от напречните сили, което можеше да се предположи. Но докато напречните сили влияят линейно на напречните премествания, осовата сила влияе нелинейно. При доближаване на значението и до критичната сила, преместванията нарастват много бързо.

Тъй като огъващият момент е пропорционален на провисването, по аналогия с формула 11.67 можем да запишем:

$$M_y=\frac{M_1}{1-\frac{P}{P_{кр}}} \tag{11.68}$$

Тук решихме задачата при конкретно закрепване на гредата. Разликата при други закрепвания ще се отрази в критичната сила, влизаща в знаменателите на 11.67 и 11.68.

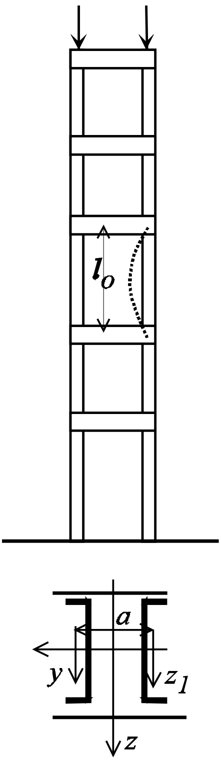
Този подход на решение на поставената задача дава малки отклонения от точното решение, когато външния товар е симетричен. Това е така, защото в този случай допускането 11.65, което направихме, наистина има място.

11.8. Някои съображения за избора на материала и формата на сечението на натиснати пръти. Устойчивост на пръти от съставни профили.

Във формулата на Ойлер (11.17) или формулата на Тимошенко (11.48) за критичната сила, материалът на пръта се отчита единствено чрез модула на еластичност. За стоманени пръти модулът на еластичност се променя в относително тесни граници – $(1{,}9\text{-}2{,}2).10^{11}\ Pa$ (вариацията е около 14 %), докато цената на различните видове стомани варира над 600 %. Изводът е, че за натиснати пръти с голяма стройност не бива да се използват скъпи стомани, освен, ако други причини не изискват това.

Видяхме също, че загубата на устойчивост е съпроводена с огъване на пръта. Следователно подходящи профили за натиснати пръти са онези, които са подходящи и за огъване – това са кухите кутиеобразни профили, двойно Т-образни профили и др.

Загубата на устойчивост зависи и от начина на закрепване на краищата на пръта. Тук чрез изменение на формата на сечението и начина на закрепване можем да осъществим еднакви стройности в двете инерционни равнини на сечението (условие 11.29), което е гаранция за равноустойчивост в тези равнини.



Фиг.11.13

В определени случаи силите са толкова големи, че един прът не може да поеме натиска. Тогава се използуват пръти от съставни профили. Съществуват различни конструкторски решения. На фиг.11.13 е показан случай при който два П-образни профила са съединени през определен интервал l_0 с планки. За осигуряване на равноустойчивост на колоната трябва да се изравнят стройностите в двете инерционни равнини. Стройността спрямо материалната ос Y се изчислява по стандартния начин:

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{\sqrt{\dfrac{J_{y,1}}{F_1}}} \qquad (11.69)$$

където $J_{y,1}$ – инерционен момент на единия профил спрямо ос y.

Стройността на колоната спрямо ос Z обаче се изчислява по различен начин:

$$\lambda_z = \sqrt{\lambda_{z,1}^2 + \lambda_{z,0}^2} \qquad (11.70)$$

Тук $\lambda_{z,1}$ - стройност на колоната спрямо нематериалната ос Z; $\lambda_{z,1}$ – локална стройност на елемент от колоната с дължина l_0 :

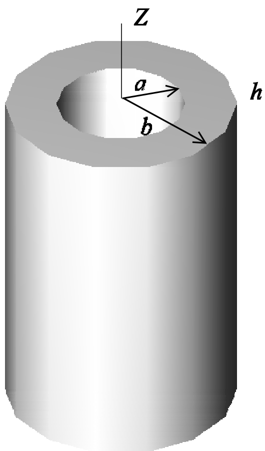
$$\lambda_{z,1} = \frac{\mu_z l}{\sqrt{\dfrac{J_{z1} + (0{,}5a)^2 F_1}{F_1}}} \qquad \lambda_{z,0} = \frac{l_0}{\sqrt{\dfrac{J_{z1}}{F_1}}} \qquad (11.71)$$

Формула 11.70 е предложена от **Енгесер.** С добавката на локалната стройност сумарната стройност около ос Z се увеличава, с което се отчита малката коравина на колоната около тази ос.

Гл.12. ДЕБЕЛОСТЕННИ ТРЪБИ И ВЪРТЯЩИ СЕ ДИСКОВЕ

Натоварването на дебелостенните тръби и въртящите се дискове се създава по различен начин, но основните уравнения са едни и същи, поради което ще бъдат разгледани съвместно.

12.1. Постановка на задачата и основни уравнения



Фиг.12.1

Дебелостенните тръби (Фиг.12.1) са тези, за които между дебелината на стената *(h)* и вътрешния радиус на тръбата *(a)* е в сила съотношението: $h \geq a/10$. Те се използват при много високи вътрешни и външни налягания, достигащи хиляди атмосфери.

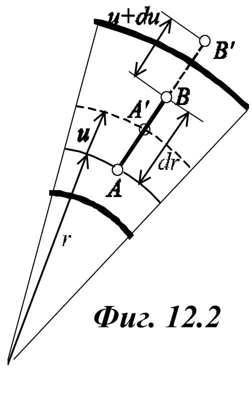
При извода на основните съотношения ще считаме, че са в сила следните основни предпоставки:

1. Натоварването на тръбата е **ососиметрично**. Ососиметрично натоварване имаме, когато по всеки отделно взет радиус натоварването е едно и също.Такова е натоварването, когато тръбата се товари от вътрешно и външно налягане.
2. Всяко напречно сечение на тръбата остава равнинно.
3. Зоните на контакт с дъната, ако има такива, се изключват от разглеждане.

Теорията на дебелостенните тръби е разработена в началото на 19 век от **Ламе.**

Както вече имахме и други подобни случаи, за получаване на диференциалното уравнение на дебелостенната тръба ще разгледаме трите групи уравнения: геометрически зависимости, уравненията на статиката и физическите зависимости.

А) Геометрични зависимости



Фиг. 12.2

Разглеждаме отсечката *AB*, отстояща на разстояние *r* от оста на тръбата с дължина *dr* по радиуса – фиг.12.2. Нека точка А се премести на разстояние *U* по радиуса, а точка В - на разстояние *U+dU*. По- късно ще видим, че ако знаем това преместване във функция от радиуса r на тръбата, знаем всичко за нея. Новото положение на отсечката АВ е А’В’, като поради ососиметричността на задачата тя остава на радиуса. Определяме относителната деформация на тази отсечка:

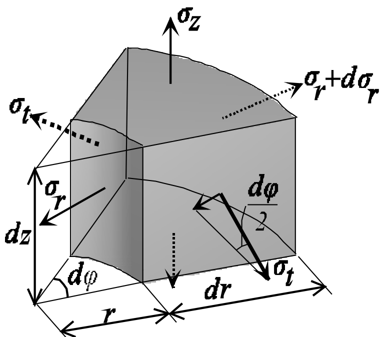
$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(dr + U + dU - U) - dr}{dr} = \frac{dU}{dr} \qquad (12.1)$$

Освен по радиуса, вследствие раздуването на цилиндъра удължение ще имаме и в направление, перпендикулярно на радиуса, което ще наречем окръжно направление. Ако разгледаме дължината (L) на една окръжност, минаваща през т.А преди и след деформацията на цилиндъра, ще получим относителната деформация в окръжно направление както следва:

$$\varepsilon_t = \frac{L_{A'} - L_A}{L_A} = \frac{2\pi\ (r + U) - 2\pi\ r}{2\pi\ r} = \frac{U}{r} \qquad (12.2)$$

Б) Уравнение на статиката

Разглеждаме равновесието на диференциален елемент, изрязан от тръбата със сектор $d\varphi$, дължина по радиуса dr и дължина по оста на тръбата – dz – фиг.12.3. Натоварването е променливо само по радиуса, по което направление нормалните напрежения ще получат нарастване. В кръгово направление поради ососиметричността на задачата нормалните напрежения няма да получат нарастване. В осово направление считаме, че тръбата е уравновесена. Елементът не получава никакви ъглови деформации и следователно тангенциални напрежения по стените му ще липсват. Така единственото уравнение на статиката, което трябва да удовлетворим, е сумата от всички сили по направление на радиуса:



Фиг.12.3

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi\ dz - \sigma_r r d\varphi\ dz - 2\sigma_t dr dz \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0 \qquad (12.3)$$

След опростяване на израза и считайки, че $\sin(d\varphi/2) = d\varphi/2$, получаваме:

$$\sigma_r - \sigma_t + \frac{d\sigma_r}{dr} r = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dr}(\sigma_r r) - \sigma_t = 0 \qquad (12.4)$$

В) Физически зависимости

Напрегнатото състояние на елемента от фиг.12.2 е обемно. Прилагаме обобщения закон на Хук (формули 4.51), като сега в ролята на осите *x, y* и *z* влизат *r, t* и *z*. Получаваме:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu(\sigma_t + \sigma_z)] \qquad \varepsilon_t = \frac{1}{E}[\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_z)] \qquad (12.5)$$

Решаваме тези две уравнения спрямо напреженията σ_r и σ_t, считайки, че напрежението σ_z е известно:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z \qquad \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z \qquad (12.6)$$

Напрежението σ_z се получава, както при центричен опън-натиск на прът.

Г) Диференциално уравнение на дебелостенната тръба

Заместваме 12.1 и 12.2 в 12.6:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{dU}{dr} + \mu\frac{U}{r}\right) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z \qquad \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{U}{r} + \mu\frac{dU}{dr}\right) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z \qquad (12.7)$$

Тук директно се вижда, че ако знаем функцията *U*, можем да намерим и напреженията. Получените зависимости за напреженията 12.7 заместваме в уравнението на статиката 12.4 и след преработка получаваме:

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = 0 \qquad (12.8)$$

Това диференциално уравнение може да се запише още така:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(U.r)\right) = 0 \qquad (12.9)$$

В еквивалентността на уравнения 12.8 и 12.9 можем да се убедим, като извършим диференцирането на последното. Диференциалното уравнение 12.9 се нарича **диференциално уравнение на Ламе** за дебелостенните тръби. То се решава при съответните условия на вътрешната и външна повърхности на тръбата. След намирането на *U*, чрез 12.7 определяме и напреженията.

12.2. Премествания и напрежения в дебелостенните тръби. Частни случаи.

А) Общ случай: тръба с вътрешно и външно налягане

След двукратно интегриране на диференциалното уравнение на дебелостенната тръба 12.9, получаваме:

$$U = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{dU}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} \qquad (12.10)$$

Радиалното напрежение на вътрешната и външната повърхности на тръбата е равно на съответните налягания:

$$\sigma_r\Big|_{r=a} = -p_a \qquad \sigma_r\Big|_{r=b} = -p_b \tag{12.11}$$

където p_a – вътрешно налягане, p_b – външно налягане, действуващо върху тръбата.

За определяне на интеграционните константи заместваме 12.10 в първото от уравненията 12.7, след което използуваме условията 12.11. Ще получим две алгебрични уравнения за определяне на константите C_1 и C_2, след решаването на която получаваме:

$$C_1 = \frac{1-\mu}{E}\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{\mu}{E}\sigma_z \qquad C_2 = \frac{1+\mu}{E}\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}(p_a - p_b) \tag{12.12}$$

Заместваме 12.12 в 12.10 и за радиалното преместване получаваме окончателно:

$$U = \frac{1-\mu}{E}\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\mu}{E}\frac{(p_a - p_b)}{b^2 - a^2}\frac{a^2 b^2}{r} - \frac{\mu}{E}\sigma_z r \tag{12.13}$$

Напреженията ще получим, заместайки 12.13 в 12.7. След преработка, получаваме:

$$\sigma_{r,t} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \mp \frac{(p_a - p_b)}{b^2 - a^2}\frac{a^2 b^2}{r^2} \tag{12.14}$$

Тук знакът (-) се отнася за напрежението σ_r, а (+) за напрежението σ_t.

От полученият израз 12.14 установяваме, че:

$$\sigma_r + \sigma_t = 2\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} = const \tag{12.15}$$

т.е., щом сумата от двете напрежения във всяка една точка от тръбата е постоянна, ако едното напрежение се увеличава, другото трябва да намалява.

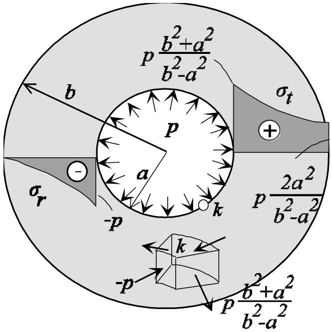
Б) Частен случай 1: тръба, подложена на вътрешно налягане.

Това е най-често срещания случай. Радиалното преместване и напреженията ще получим от 12.13 и 12.14, заместайки в тях $p_a=p$ и $p_b=0$. Получаваме:

$$U = \frac{pa^2}{E(b^2 - a^2)}\left((1-\mu)r + (1+\mu)\frac{b^2}{r}\right) - \frac{\mu}{E}\sigma_z r \qquad \sigma_{r,t} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 \mp \frac{b^2}{r^2}\right) \tag{12.16}$$

Разпределението на напреженията σ_r и σ_t е показано на фиг.12.4. Опасна точка се явява коя и да е точка от вътрешната повърхност на тръбата. Напрегнатото състояние в коя и да е точка (изключвайки напрежението σ_z) е двумерно. Еквивалентното напрежение по трета якостна хипотеза ще бъде:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - \sigma_r = p\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - (-p) = p\frac{2b^2}{b^2 - a^2} \leq [\sigma] \tag{12.17}$$



Фиг. 12.4

Последното уравнение служи за оразмеряване на тръбата. Обикновено вътрешният радиус се избира по други съображения, така, че чрез уравнението определяме външния радиус.

Нека да видим как ще се промени еквивалентното напрежение, правейки стената на тръбата безкрайно-голяма, което означава да устремим външния радиус към безкрайност.

$$\sigma_{екв}^{III}\Big|_{b\to\infty} = p\frac{2b^2}{b^2\left(1 - \dfrac{a^2}{b^2}\right)} = 2p \tag{12.18}$$

т.е., еквивалентното напрежение клони към крайната стойност *2p*.

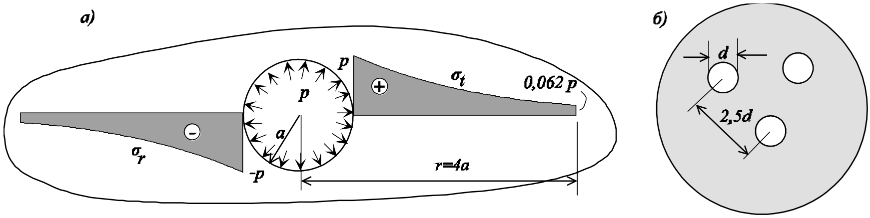
Чрез 12.16 можем да изследваме как затихват напреженията при безкрайно голям външен радиус:

$$\sigma_{r,t}\Big|_{b\to\infty} = \frac{pa^2b^2}{b^2\left(1 - \dfrac{a^2}{b^2}\right)}\left(\frac{1}{b^2} \mp \frac{1}{r^2}\right) = \mp p\frac{a^2}{r^2} \tag{12.19}$$

Получихме, че напреженията се променят по един и същи закон, като се различават само по знака си. При $r=4a$ двете напрежения са вече с големина $p/16 = 6{,}25\ \%$ от максималните им стойности – фиг. 12.5-а.

Този факт може да се използва при нитови съединения. При качествено изпълнен нитов шев, листовете, които се съединяват, се товарят от вътрешното налягане при раздуването на нитовете, което се създава при нитоването. Около отворите се създават напрежения, подобни на графиките на фиг. 12.5-а. При това напреженията от два съседни нита се сумират. За да не нарасне твърде много сумарното напрежение, стъпката на нитовия шев не бива да е по-малка от *2,5d*, където *d* - диаметър на нита.

Същото може да се каже и за тяло, в което са направени отвори, през които тече някакъв флуид с високо налягане – фиг.12.5-б. За да отслабне влиянието на налягането от единия отвор върху напрегнатото състояние в околността на другия отвор и обратно, разстоянието между отворите трябва да е поне 2,5d, където *d* - диаметър на отворите.



Фиг. 12.5

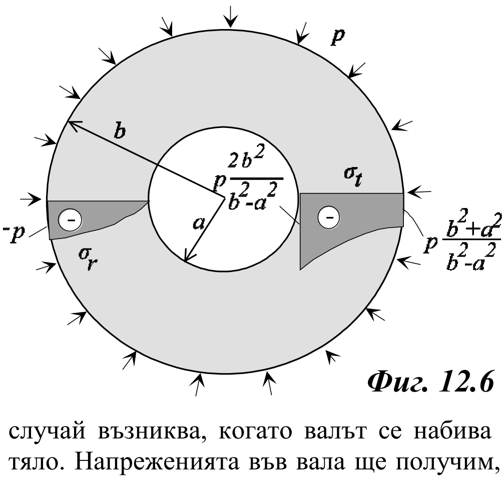
В) Частен случай 2: Тръба с външно налягане

Подобно на първи частен случай, преместванията и напреженията получаваме от 12.13 и 12.14, замествайки в тях $p_a=0$ и $p_b=p$.

$$U = -\frac{pb^2}{E(b^2-a^2)}\left((1-\mu)r+(1+\mu)\frac{a^2}{r}\right)-\frac{\mu}{E}\sigma_z r$$

$$\sigma_{r,t} = -\frac{pb^2}{b^2-a^2}\left(1\mp\frac{a^2}{r^2}\right) \tag{12.20}$$

Разпределението на напреженията е показано на фиг.12.6. Виждаме, че максималното напрежение възниква отново по вътрешната повърхност на тръбата и е равно по модул точно на еквивалентното напрежение за тръба с вътрешно налягане – виж формула 12.17. Следователно оразмеряването на тръбата става по същата формула.



Фиг. 12.6

Полученият резултат може да се приложи за кръгъл плътен вал, подложен на външно налягане. Такъв случай възниква, когато валът се набива със стегнатост в отвор на друго тяло. Напреженията във вала ще получим, ако във формула 12.20 положим *a=0*. Тогава се оказва, че $\sigma_{r,t} = -p$, т.е. във всяка точка от напречното сечение валът е подложен на двустранен натиск.

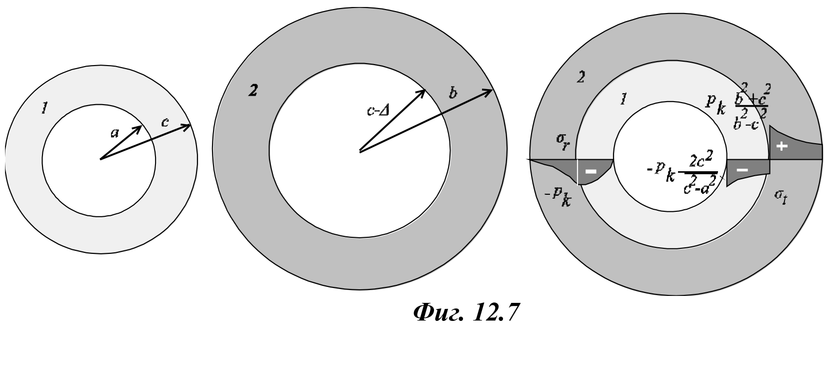
12.3. Напрежения в съставни тръби

По-горе получихме, че колкото и да увеличаваме дебелината на стената на тръбата, еквивалентното напрежение не може да бъде по-малко от $2p$ – виж формула 12.18. Приравнявайки това напрежение на границата на провлачване $(\sigma_s \le 2p)$, ще получим, че максималното възможно налягане, което може да поеме една тръба, ще бъде $p_{max} = \sigma_s /2$. Към днешно време най-яките стомани имат σ_s около *2000 MPa*, следователно максималното налягане, което може да поеме една тръба, ще бъде около 1000 *MPa (10 000 atm).*

Възниква въпросът: не можем ли с някакви конструктивни (или други) мерки при наличните материали да повишим максималното налягане? Такива решения са намерени. Тук ще разгледаме две от тях.

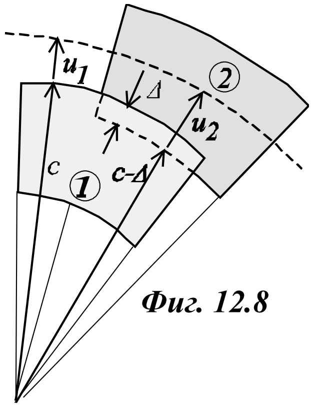
И при двете решения се използва идеята на **предварително напрегнатите конструкции**, съгласно която в най-натоварените зони се създават **предварителни напрежения**, които са обратни по знак на напреженията от полезния товар.

Технологията на първия метод е следната: вземат се две гладко обработени метални тръби – 1 и 2 (фиг.12.7), при което външният диаметър на тръба 1 е малко по-голям от вътрешния диаметър на тръба 2. Тръба 2 се нагрява, за да се разшири и тръба 1 се вкарва в нея. След изстиването на тръбите се получава една монолитна тръба, която по контактната повърхност между тръбите заради свиването на външната тръба ще изпитва налягане – тръба 1 е подложена на външно налягане, а тръба 2 - на вътрешно налягане. Това налягане наричаме **контактно налягане**. Контактното налягане ще предизвика предварителни напрежения във вътрешната тръба както за тръба с външно налягане (фиг.12.6), а във външната тръба – както за тръба с вътрешно налягане – фиг.12.4. Тези напрежения (показани на фиг. 12.7) ще действуват в двете тръби винаги.



Фиг. 12.7

Ако сега съставната тръба се натовари с вътрешно налягане, това налягане ще създаде в нея напрежения, както за монолитна тръба – фиг.12.4. Тъй като в най-натоварените точки (вътрешния слой) съществуват значителни предварителни напрежения с обратен знак, налице е възможността за повишаване на вътрешното налягане.



Фиг. 12.8

А) Определяне на контактното налягане

Контактното налягане между двете тръби, които ще считаме, че са изработени от един и същи материал, може да се определи, вземайки предвид деформациите на тръбите – фиг.12.8. На тази фигура са показани два сектора от двете тръби, състоянието им преди сглобката и с пунктир – положението на контактната повърхност след сглобката. От фигурата следва:

$$U_2 - U_1 = \Delta \tag{12.21}$$

За да определим U_2, заместваме в 12.16: $p=p_k$, $a=c$, $r=c$:

$$U_2 = \frac{p_k c^2}{E(b^2 - c^2)}\left((1-\mu)c + (1+\mu)\frac{b^2}{c} \right) \tag{12.22}$$

Аналогично, за да определим U_1, заместваме в 12.20: $p=p_k$, $b=c$, $r= c$:

$$U_1 = -\frac{p_k c^2}{E(c^2 - a^2)}\left((1-\mu)c + (1+\mu)\frac{a^2}{c} \right) \tag{12.23}$$

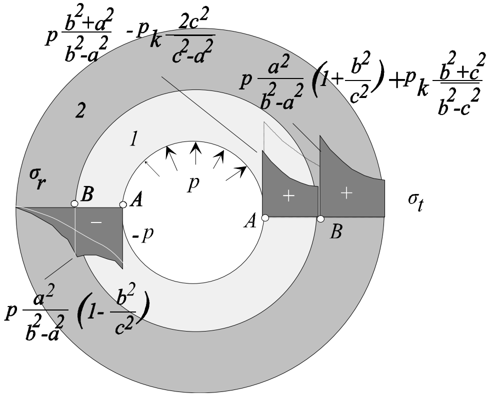
Заместваме 12.23 и 12.22 в деформационното уравнение 12.21, откъдето определяме контактното налягане:

$$p_k = \frac{E\Delta}{2c^3}\frac{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)} \tag{12.24}$$

По такъв начин предварителните напрежения, показани на фиг. 12.7 са напълно определени.

Б) Определяне на сумарните напрежения в тръбите.

Ако съставната тръба се подложи на вътрешно налягане p, в нея ще възникнат напрежения, както за първи частен случай. Тези напрежения ще се сумират с предварителните (съгласно фиг.12.7) и в тръбата ще получим сумарни напрежения, както е показано на фиг.12.9.



Фиг.12.9

От тази фигура виждаме, че кръговите напрежения във вътрешната тръба намаляват, но във външната тръба се увеличават. За да бъде напрегнатото състояние в застрашените точки (А и В) равноопасно, изравняваме еквивалентните напрежения в тези точки.

$$\sigma^{III}_{екв,A} = \sigma^{III}_{екв,B} \tag{12.25}$$

Или:

$$\sigma_{t,A} - \sigma_{r,A} = \sigma_{t,B} - \sigma_{r,B} \tag{12.26}$$

Заместваме тук напреженията, изобразени на фиг.12.9, като контактното налягане заместваме съгласно 12.24. Получаваме алгебрично уравнение относно Δ , решението на което е:

$$\Delta = \frac{2p}{E}\frac{cb^2(c^2-a^2)}{b^2(c^2-a^2)+c^2(b^2-c^2)} \tag{12.27}$$

Ако разликата в монтажните радиуси на двете тръби бъде определена съгласно 12.27, тогава еквивалентните напрежения в опасните точки на двете тръби ще са равни. Забележете, че това условие зависи не само от размерите на тръбите, но и от работното налягане.

Самата стойност на еквивалентното напрежение ще получим, замествайки обратно 12.27 в 12.24 и 12.25. Получаваме:

$$\sigma_{екв,A} = \sigma_{екв,B} = p\frac{2b^2}{(b^2-a^2)}\left(1-\frac{1}{\dfrac{b^2}{(b^2-c^2)}+\dfrac{c^2}{(c^2-a^2)}}\right) \tag{12.28}$$

При фиксирани значения на вътрешния радиус a и външния радиус b на тръбите, еквивалентното напрежение може да бъде минимизирано чрез подходящ избор на междинния радиус c. Или:

$$\text{(12} \quad от \quad \frac{\partial \sigma_{екв}}{\partial c} = 0 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{ab} \qquad \text{.29)}$$

Условие 12.29 се нарича условие на **Гадолин** (руски военен инженер).

Самият минимум на еквивалентното напрежение ще получим, замествайки 12.29 в 12.28:

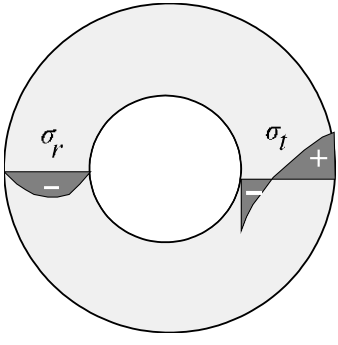
$$\sigma_{екв,\min} = p\frac{b}{b-a} \tag{12.30}$$

Ако тръбата не беше съставна, а монолитна, еквивалентното напрежение се определя съгласно 12.17. За да оценим ефекта от използването на съставна тръба, нека да определим отношението на еквивалентните напрежения за двата случая:

$$\frac{\sigma_{екв,\min}}{\sigma_{екв}} = p\frac{b}{(b-a)}\frac{(b^2-a^2)}{2pb^2} = \frac{b+a}{2b} \tag{12.31}$$

Последният израз показва, че ако двете тръби са тънкостенни (тогава $a \approx b$) отношението на еквивалентните напрежения ще клони към единица, т.е. няма да има никакъв ефект. Ако двете тръби са дебелостенни и при това ($a<<b$), отношението ще клони към ½ . Следователно максималните еквивалентни напрежения се намаляват наполовина, а това значи, че съставната тръба може да бъде натоварена с два пъти по-високо налягане.

Ефектът от прилагането на съставни тръби ще бъде също нулев, ако модулите на еластичност за материалите на двете тръби се различават много (например ако едната тръба е стоманена, а другата - пластмасова).

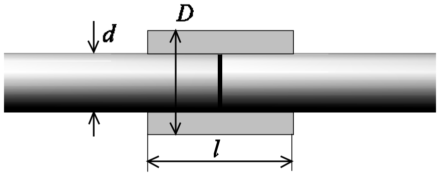


Фиг. 12.10

В) Автофретиране

Съществува друг, значително по-прост начин за повишаване товароносимостта на дебелостенна тръба. За целта същата се подлага на високо налягане, такова, че в нея да се получат пластични деформации (естествено материалът на тръбата не може да бъде крехък). След сваляне на налягането в тръбата остават да действуват т.н. **остатъчни напрежения**, при което техният знак във вътрешния слой на тръбата е обратен на знака на работните напрежения – фиг.12.10. Така товароносимостта на тръбата се повишава. Тази технология носи названието ‘**автофретаж**’.

Г) Пример 12.1. Корабен валопровод с диаметър *d=15 cm* се върти с $n=300\ min^{-1}$ и предава мощност *N=800 kW*. Поради голямата дължина на валопровода, той е съставен от отделни части, като свързването става безфланцово – посредством цилиндрична втулка, набита във валовете със стегнатост – фиг.12.11. Да се определи необходимата стегнатост между вала и втулката, ако коефициентът на триене е *f=0,2,* а размерите на втулката са: *D=20 cm* и *l=30 cm*. За материала на вала и втулката $E=2,1.10^{11}\ N/m^2$. След определянето на стегнатостта да се определят напреженията във втулката и вала.



Фиг.12.11

Определяме въртящия момент:

$$M_{ус}=9,55\frac{N}{n}=9,55\frac{800}{300}=25,5kNm$$

Контактното налягане между вала и втулката създава сили на триене, моментът от които ще бъде:

$$M_{тр}=p_k\left(\pi\ d\frac{l}{2}\right)f\frac{d}{2}=\pi\ \frac{d^2}{4}lfp_k$$

За да се предаде усукващият момент, е необходимо да се изпълни условието:

$$M_{тр}>M_{ус}\quad\rightarrow\quad\pi\ \frac{d^2}{4}lfp_k>M_{ус}\quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad p_k>\frac{4M_{ус}}{\pi\ d^2lf}=\frac{4.25,5.10^3}{\pi\ \ 0,15^2.0,15.0,2}=48,1MPa$$

Контактното налягане между вала и втулката ще определим по 12.24, като заместим: *a=0, b=D/2=0,1 m, c=d/2=0,075 m.*

Разликата в диаметрите между вала и втулката ще бъде $2\Delta=157\ \mu m$.

$$p_k=\frac{E\Delta}{2c}\frac{b^2-c^2}{b^2}\quad\rightarrow\quad\Delta=\frac{p_k}{E}2c\frac{b^2}{b^2-c^2}=$$

$$=\frac{48,1.10^6}{2,1.10^{11}}2.0,075\frac{0,1^2}{0,1^2-0,075^2}=78,5.10^{-6}\ m=78,5\mu\ m$$

Ако втулката се монтира чрез нагряване, то минималната температурна разлика на втулката (спрямо околната температура) ще бъде:

$$\alpha\ dT^{\circ} = 2\Delta \quad \rightarrow \quad T^{\circ} = \frac{2\Delta}{\alpha\ d} = \frac{157.10^{-6}}{12.10^{-6}.0{,}15} = 87{,}2^{\circ}$$

Тук за коефициента на линейно температурно разширение е прието значение $\alpha = 12.10^{-6}$.

Накрая ще проверим напреженията във вала и втулката.

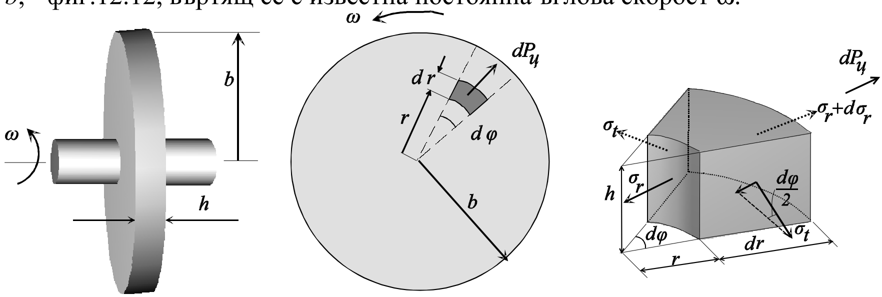
Валът се товари от контактното налягане на натиск и във всяка негова точка възниква двустранен натиск с големина *48,1 MPa*.

Втулката се товари от контактното налягане и максималното еквивалентно напрежение в нея ще възникне по вътрешната периферия. На основание на 2.17, получаваме:

$$\sigma_{екв}^{III} = p_k \frac{2b^2}{b^2 - c^2} = 48{,}1.10^6 \frac{2.0{,}1^2}{0{,}1^2 - 0{,}075^2} = 220\,MPa$$

12.4. Напрежения в бързовъртящи се дискове

Ще разгледаме плътен диск с постоянна дебелина *h* и външен радиус *b*, - фиг.12.12, въртящ се с известна постоянна ъглова скорост ω.



Фиг. 12.12

А) Геометрически зависимости

Въртящите се дискове удовлетворяват условията за ососиметричност на натоварването, което сега се получава от действието на центробежните сили. Поради това геометрическите зависимости 12.1 и 12.2 остават в сила.

$$\varepsilon_r = \frac{dU}{dr} \qquad \varepsilon_t = \frac{U}{r} \tag{12.32}$$

Б) Уравнение на статиката

При разглеждане равновесието на елемент от диска, към силите от радиалното и кръгово напрежения се добавя центробежната сила, която за елемента ще бъде:

$$dP_ц = dm\omega^2 r = (rd\varphi\, drh)\frac{\gamma}{g}\omega^2 r = \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 hd\varphi\, dr \qquad (12.33)$$

където γ– относително тегло за материала на диска, g- земно ускорение.

Уравнението на равновесие от силите по направление на радиуса ще има вида:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi\, dz - \sigma_r rd\varphi\, dz - 2\sigma_t drdz \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 hd\varphi\, dr = 0 \qquad (12.34)$$

След опростяване, получаваме:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r) - \sigma_t = -\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 \qquad (12.35)$$

В) Физически зависимости

Елементът от диска се намира в равнинно напрегнато състояние. Законът на Хук, записан по отношение на напреженията, ще има вида:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\,\varepsilon_t) \qquad \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t + \mu\,\varepsilon_r) \qquad (12.36)$$

или на основание на 12.32, получаваме:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{dU}{dr} + \mu\frac{U}{r}\right) \qquad \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{U}{r} + \mu\frac{dU}{dr}\right) \qquad (12.37)$$

Г) Диференциално уравнение на въртящия се диск и неговото решение.

Заместваме 12.37 в 12.35 и след преобразуване, получаваме:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(U.r)\right) = -\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r \qquad (12.38)$$

След двукратно интегриране на 12.38, получаваме:

$$U = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1-\mu^2}{E}\frac{\gamma}{8g}\omega^2 r^3 \qquad (12.39)$$

За определяне на константите ще използуваме граничните условия:

1. При $r=0 \rightarrow U=0 \rightarrow C_2=0$.
2. При $r=b \rightarrow \sigma_r=0$. На основание на 12.37, получаваме:

$$\left(\frac{dU}{dr} + \mu \frac{U}{r} \right)\Bigg|_{r=b} = 0 \tag{12.40}$$

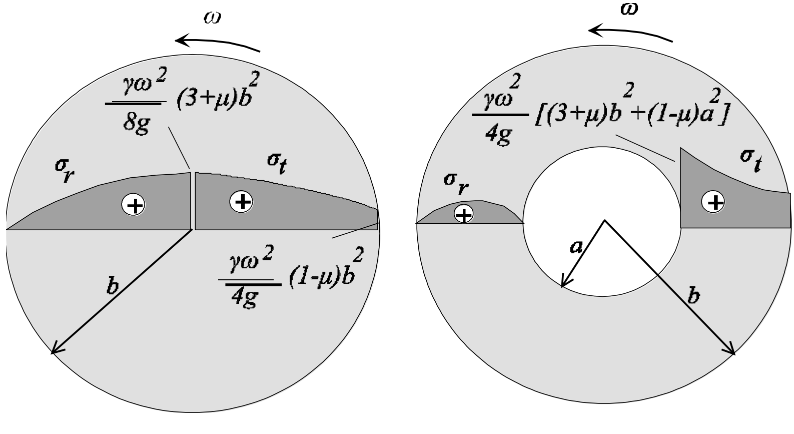
Заместваме тук 12.39 и определяме втората интеграционна константа:

$$C_1 = \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\gamma}{8g} \omega^2 b^2 \frac{3+\mu}{1+\mu} \tag{12.41}$$

Заместваме така определените константи в 12.39 и след това в 12.36, с което за разпределението на напреженията получаваме следните изрази:

$$\sigma_r = \frac{\gamma \omega^2}{8g}(3+\mu)(b^2 - r^2) \qquad \sigma_r = \frac{\gamma \omega^2}{8g}(3+\mu)\left(b^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2\right) \tag{12.42}$$

Разпределението на радиалното и кръгово напрежения е показано на фиг. 12.13-а. Максималните стойности на двете напрежения се получават в центъра на диска и са равни помежду си.



а) *б)*

Фиг. 12.13. Напрежения в бързовъртящи се дискове

Забележете, че напреженията, (а също и преместванията), не зависят от дебелината на диска.

Плътни въртящи се дискове се изработват при не много големи диаметри на диска. Много по-често обаче се използуват дискове с централен отвор – за шлифовъчни дискове, турбинни дискове и др.

Д) Диск с централен отвор

Ще считаме, че дискът е монтиран върху вала без стегнатост. Тогава граничните условия за определяне на константите на решението 12.39 ще бъдат - фиг.12.13-б:

1. При $r=a \rightarrow \sigma_r=0.$
2. При $r=b \rightarrow \sigma_r=0.$

На основание на 12.37, получаваме:

$$\left(\frac{dU}{dr}+\mu\frac{U}{r}\right)\Bigg|_{r=a}=0 \qquad \left(\frac{dU}{dr}+\mu\frac{U}{r}\right)\Bigg|_{r=b}=0 \tag{12.43}$$

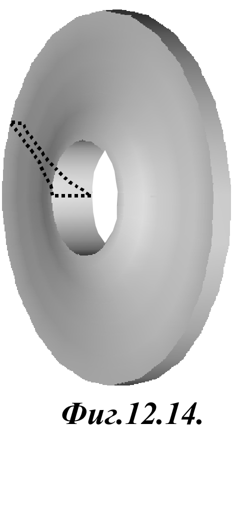
Заместваме решението 12.39 в 12.43 и след решаване на системата алгебрични уравнения относно неизвестните константи, получаваме:

$$C_1=\frac{1-\mu}{E}\frac{\gamma}{8g}\omega^2(3+\mu)(b^2+a^2) \qquad C_2=\frac{1+\mu}{E}\frac{\gamma}{8g}\omega^2(3+\mu)b^2a^2 \tag{12.44}$$

Заместваме така определените константи в 12.39 и 12.37. За разпределението на напреженията получаваме:

$$\sigma_r=\frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)(b^2+a^2-\frac{a^2b^2}{r^2}-r^2) \tag{12.45}$$

$$\sigma_r=\frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)(b^2+a^2+\frac{a^2b^2}{r^2}-\frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2)$$



Фиг.12.14.

Диаграмите на напреженията са показани на фиг.12.13-б. Максималната стойност на кръговото напрежение възниква по вътрешната периферия на диска, а максималната стойност на радиалното напрежение – в точка с радиус $r=\sqrt{(ab)}$.

Диаграмите на напреженията за двата случая показват, че най-натоварени са вътрешните слоеве на диска. Поради това дисковете на парни турбини, които могат да достигнат няколко метра в диаметър, се изработват с променлива дебелина – максимална в центъра и по-малка в краищата – фиг.12.14. С това се постига не само икономия на материал, но и снижение на напреженията в центъра на дисковете. С избор на подходящ закон на изменение на дебелината по радиуса, може да се конструира диск, на който кръговото напрежение е постоянно по радиуса.

Оразмеряването на дисковете става по максималното еквивалентно напрежение. Някои изводи могат да бъдат направени, ако вземем по-простия случай – диск без отвор. Оразмеряването ще извършим съгласно израза:

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - 0 = \frac{\gamma \omega^2 b^2}{8g}(3+\mu) \leq \frac{\sigma_s}{n} \qquad (12.46)$$

Тук произведението $\omega.b=V$ представлява периферната скорост на диска (скоростта на точките по периферията на диска). Решавайки това уравнение спрямо V, ще получим:

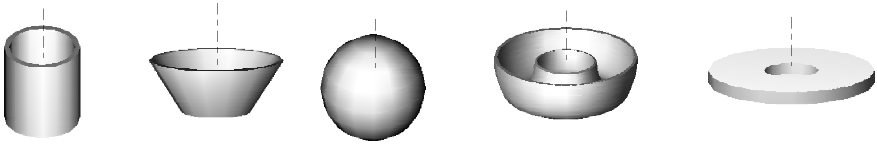
$$V \leq \sqrt{\frac{8\sigma_s g}{n\gamma(3+\mu)}} \qquad (12.47)$$

Ако заместим данните за стомана 34ХН3М, използувана за турбинни дискове (σ_s*=800 MPa*), при коефициент на сигурност *n=2* ще получим, че максималната периферна скорост на диска е *345 m/s*. Тъй като V=ω *b,* следва, че при дискове с големи диаметри, допустимата ъгловата скорост намалява и обратно. При радиус *b=1 m* (диаметър *2 m*) максималната ъглова скорост ще бъде *345* s^{-1} (около 34*00 об/мин*), но при радиус *0,05 m* (диаметър – *0,1 m*), максималните обороти могат да достигнат *65 000 об/мин.* Проблемът обаче е в това, че няма надеждни лагери за такива високи обороти.

Гл. 13. ТЪНКИ ПЛОЧИ И ЧЕРУПКИ

В гл.1 видяхме, че **черупка** наричаме тяло, единият размер на което е много по-малък от останалите два размера. Ако гредата се характеризира с нейната ос, то черупката се характеризира с нейната **средна повърхнина**, представляваща геометрично място на точки, разполовяващо дебелината на стената на черупката.

Тук ще разгледаме само **ососиметрични** (**ротационни**) черупки – такива, за които средната повърхнина се получава, когато някаква линия се завърти около дадена ос – фиг.13.1. Най-често срещани ососиметрични черупки са цилиндричната (а), коничната (б), сферичната (в) и тороидалната черупка -(г). Ако линията е права и перпендикулярна на оста на ротация, получаваме кръгла плоча (д).



а) цилиндрична

б) конична ***в)*** сферична ***г)*** тороидална ***д)*** кръгла плоча

Фиг.13.1. Видове ососиметрични черупки

Ще разгледаме ососиметрични черупки под действието на **ососиметричен товар** – товар, който не зависи от ъгъла на ротация. Такива товари са вътрешното и външното налягане, собственото тегло (при вертикална ос на ротация), центробежните сили (ако черупката се върти) и др.

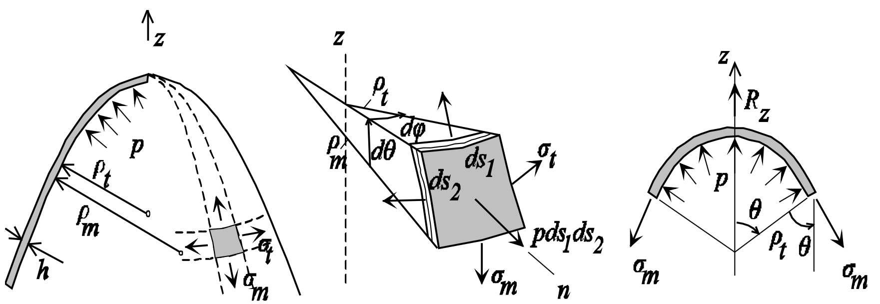
Съществуват три вида теории за анализ на черупките – **безмоментна, полубезмоментна** и **моментна** теории. Названието им показва дали се вземат под внимание огъващите моменти в черупката. Най-проста от всички е безмоментната теория, която при определени условия дава достатъчно точни резултати. В някои случаи обаче се налага използването на моментната теория, която е най-сложна, но и най-точна.

13.1. Безмоментна теория на черупките. Уравнение на Лаплас.

А) Определения

Нека разгледаме ротационна черупка с произволна форма на образуващата линия – фиг.13.2-а и постоянна дебелина на стената – h.

а) ***б)*** ***в)***



Фиг.13.2.

Сечението, което се получава от пресичането на равнината, минаваща през оста на ротация (z) с черупката, наричаме **меридианно сечение (**показано на фигурата**)**. Във всяка точка това сечение се характеризира с **радиус на кривина на меридианното сечение** ρ_m, представляващ разстоянието от центъра на кривина на сечението до средната повърхнина.

Сечението, което се получава от пресичането на равнина, перпендикулярна на оста на ротация с черупката, наричаме **кръгово сечение**. Това сечение за ротационни черупки ще бъде винаги кръгов пръстен. Разстоянието от оста на ротация до средната повърхнина (мерено по перпендикуляра към средната повърхнина), наричаме **радиус кривина на кръговото сечение**.- ρ_t.

От вътрешната страна на черупката действува налягане *p*, което може да бъде функция единствено на координатата *z*. Ако изрежем елемент от черупката с две кръгови сечения и две меридианни сечения (показани на фигурата с пунктирани линии), по стените на елемента в направление на меридиана действува напрежението σ_m (**меридианно напрежение**), а в окръжно направление – напрежението σ_t (**кръгово напрежение**). Съгласно безмоментната теория тези напрежения са равномерно разпределени по дебелината на стената ! Това означава, че в направление на меридиана и в кръгово направление действуват единствено опънови (натискови) сили, без огъващи моменти, откъдето произлиза названието на теорията.

Б) Уравнение на Лаплас

Да разгледаме равновесието на елемента от черупката, получен между две близки меридианни сечения и две близки кръгови сечения – фиг. 13.2-б. Записваме сумата от всички сили, действуващи по нормалата *n* към средната повърхнина:

$$pds_1ds_2 - 2\sigma_m \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - 2\sigma_t \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0 \qquad (13.1)$$

Като вземем предвид, че синусите от малки ъгли са равни на самите ъгли и $ds_1 = \rho_t.d\varphi$, $ds_2 = \rho_m d\theta$, след опростяване, получаваме:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h} \qquad (13.2)$$

Това уравнение е известно като уравнение на Лаплас (1740-1827), известен учен в областта на хидродинамиката, който изследвайки течности е установил, че повърхностните напрежения на капка течност се подчиняват на същото уравнение.

Това уравнение съдържа двете неизвестни напрежения, но очевидно е недостатъчно за тяхното определяне. Второто уравнение за тях ще получим, разглеждайки равновесието на елемент, изрязан от черупката с произволно кръгово сечение – фиг.13.2-в. Записваме сумата от всички сили, действуващи по ос *z*:

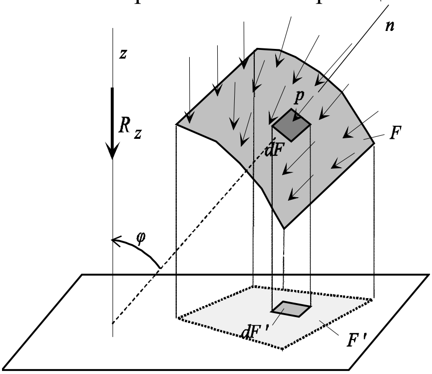
$$R_z - \sigma_m(2\pi\ \rho_t \sin\theta\ h)\sin\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_m = \frac{R_z}{2\pi\ \rho_t h \sin^2\theta} \qquad (13.3)$$

където R_z – равнодействуващата на налягането по ос z. От 13.2 и 13.3 определяме двете напрежения σ_m и σ_t.

За определяне на равнодействуващата R_z ще разгледаме две теореми.

В) Теорема за равнодействуващата на равномерно разпределено налягане

Теоремата гласи: Проекцията на равнодействуващата на равномерно разпределено налягане, действуващо по произволна повърхнина върху дадена ос, е равно на произведението от налягането и проекцията на повърхнината върху равнина, перпендикулярна на тази ос.



Фиг.13.3

Разглеждаме произволна повърхнина с площ F, натоварена с равномерно разпределено налягане p – фиг.13.3. Проекцията на силата, действуваща върху елементарната площ dF върху ос z ще бъде:

$$dR_z = (pdF)\cos\varphi = pdF'$$

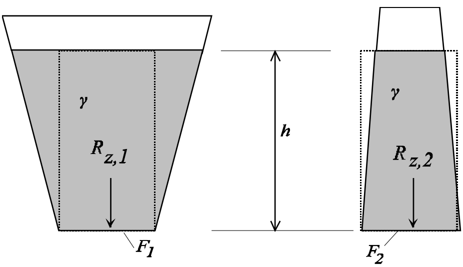
където dF’ – проекция на елементарната площ върху равнина, перпендикулярна на ос z. Пълната сила ще бъде:

$$R_z = \int_{F'} pdF' = p\int_{F'} dF' = pF' \qquad (13.4)$$

което трябваше да докажем.

Г) Теорема за равнодействуващата при хидростатично налягане

Тази теорема гласи: Ако върху дъното на съд действува хидростатично налягане, то вертикалната компонента на главния вектор на налягането върху дъното е равна на теглото на призматичния обем течност над дъното, независимо от формата на съда.



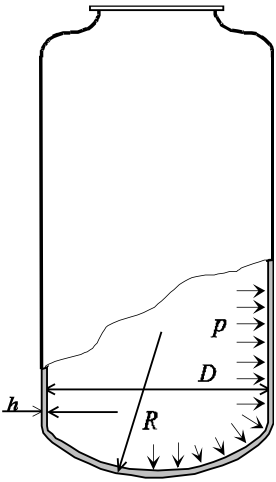
Фиг. 13.4

Разглеждаме два съда с различна форма – фиг.13.4. Както е известно от физиката, хидростатичното налягане на дълбочина h е равно на

$\gamma.h$, където γ - относително тегло на течността в съда. Тогава равнодействуващите на налягането върху дъната в двата съда ще бъдат:

$$R_{z,1} = \gamma\ hF_1 \qquad R_{z,2} = \gamma\ hF_2 \tag{13.5}$$

Но произведенията $\gamma.hF$ представляват теглата на въображаемите обеми течности над дъната (показани на фиг.13.4 с пунктир). Ако в изразите 13.5 положим $F_1=F_2$, тогава равнодействуващите на налягането върху дъната на двата съда ще бъдат равни помежду си. Следователно формата на съда не играе значение върху големината на равнодействуващата, което трябваше да докажем.



Фиг. 13.5

Д) Пример 13.1. Водосъдържател на бойлер за топла вода представлява цилиндрична черупка със сферични дъна със среден диаметър на цилиндъра *D=0.32 m,* радиус на дъното *R=0.35 m* и дебелина на стената *h=2,5 mm* – фиг.13.5 Да се определи еквивалентното напрежение по трета якостна хипотеза в цилиндричната и сферичната части на съда при налягане *p=10 atm*.

1. Цилиндрична част.

Радиусът на кривина на кръговото сечение на цилиндъра е *D/2*. Меридианното сечение на цилиндричната черупка е права линия, радиусът на кривина на която клони към безкрайност ($\rho_m \to \infty$). Тогава първото събираемо от уравнението на Лаплас 13.2 клони към нула, откъдето за кръговото напрежение σ_t получаваме:

$$\sigma_t = \frac{p\rho_t}{2} = \frac{pD}{2h} = \frac{10.10^5.0,32}{2.2,5.10^{-3}} = 64\ MPa$$

За да получим меридианното напрежение, разглеждаме равновесието на част от черупката, която се получава след разрез с равнина, перпендикулярна на оста на ротация или използуваме уравнение 13.3, в което ще положим $\theta=90°$, $R_z=p.\pi D^2/4$. Получаваме:

$$\sigma_m = \frac{p\pi\ D^2.2}{4.2\pi\ Dh} = \frac{pD}{4h} = 32\,MPa$$

Главните напрежения ще бъдат:

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{pD}{2h} \qquad \sigma_2 = \sigma_m = \frac{pD}{4h} \qquad \sigma_3 = 0$$

Заместваме във формулата за еквивалентното напрежение по трета якостна хипотеза и получаваме:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pD}{2h} = 64\, MPa$$

Последната формула е известна като '**котелна формула'**, с която се проверяват якостно цилиндрични котли под налягане.

2. Сферична част.

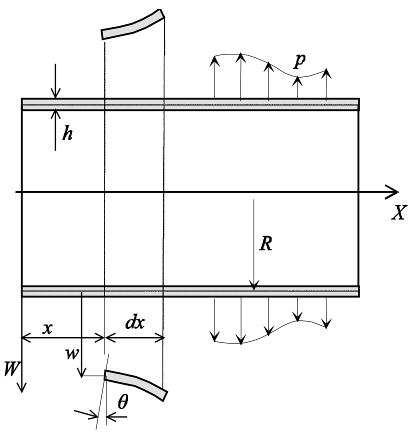
За сферичната част поради пълната симетрия на сферата радиусите на кривина на меридианното и кръговото сечения са еднакви, както са еднакви и меридианното и кръгово напрежения. От формулата на Лаплас получаваме:

$$2\frac{\sigma_m}{R} = \frac{p}{h} \quad \rightarrow \quad \sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2h} = \frac{10.10^5.0,35}{2.2,5.10^{-3}} = 70\ MPa$$

Еквивалентното напрежение ще бъде също *70 Мра*.

13.2. Огъване на цилиндрична черупка. Граничен ефект.

Безмоментната теория на черупките дава добри резултати в онези области от черупката, където липсва огъване. В местата на закрепване на черупките и в местата на преходи от една форма към друга форма (както в разгледаната по-горе задача), както и в местата на промяна на дебелината на стената, огъването е неминуемо. Пораждащите се огъващи моменти променят основно напреженията в тези участъци. Ще разгледаме тези промени само за цилиндрична черупка.



Фиг. 13.6

Разглеждаме цилиндрична черупка с радиус на средната повърхнина R и дебелина h - фиг. 13.6 при следните предпоставки:

1. Натоварването е ососиметрично (може да се мени само по оста на черупката).

2. Справедлива е хипотезата на **Кирхоф**, съгласно която точките, лежащи по една нормала към средната повърхнина на черупката преди деформацията, остават да лежат върху тази нормала и след деформацията. Тази хипотеза е еквивалентна на хипотезата на Бернули за греди.

3. Взаимодействие между пластовете на черупката по направление на нормалата липсва.

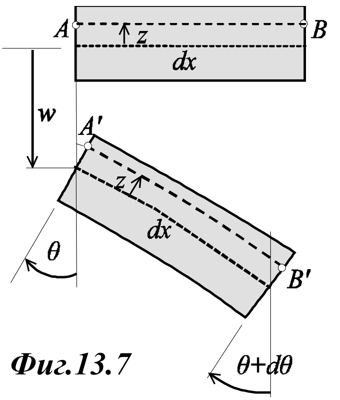
Изложената по-долу теория е справедлива, ако $h/R \leq 1/20$.

A) Геометрически зависимости

Разглеждаме елемент от черупката с дължина dx – фиг.13.6, където са показани положителните посоки на преместването (W) на точките от средната повърхнина и ъгъла на завъртване на нормалата към средната повърхнина (θ). При малки премествания те са свързани със зависимостта:

$$\theta = \frac{dW}{dx} \tag{13.6}$$

Деформацията на елемента по ос X може да бъде предизвикана от опън/натиск (ε_0), която ще бъде постоянна за всички точки от напречното сечение, а също и от огъването на елемента. Деформацията от огъването ще получим от фиг.13.7, разглеждайки отсечката AB, отстояща на разстояние z от средната повърхнина:



Фиг.13.7

$$\varepsilon_{ог} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\left(dx + z(\theta + d\theta) - z\theta\right) - dx}{dx} = z\frac{d\theta}{dx}$$

Пълната деформация по ос X ще бъде:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \varepsilon_{ог} = \varepsilon_0 + z\frac{d\theta}{dx} \tag{13.7}$$

Вследствие раздуването на черупката ще получим деформация и в окръжно направление (Y), която ще изчислим, като сравним дължините на окръжността, минаваща през средната повърхнина на черупката преди и след деформацията:

$$\varepsilon_y = \frac{2\pi\,(R + w) - 2\pi\,R}{2\pi\,R} = \frac{w}{R} \tag{13.8}$$

B) Физически зависимости

Записваме закона на Хук спрямо напреженията за елемент от черупката, който ще се намира в условията на равнинно напрегнато състояние.

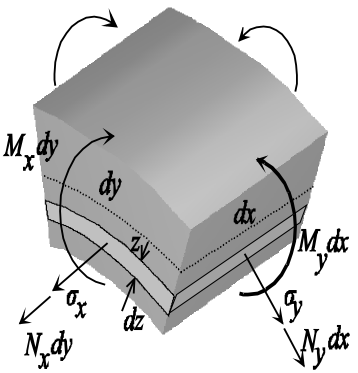
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\,\varepsilon_y) = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_0 + z\frac{d\theta}{dx} + \mu\,\frac{w}{R}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\,\varepsilon_x) = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{w}{R} + \mu\varepsilon_0 + \mu\,z\frac{d\theta}{dx}\right)$$

(13.9)

Г) Връзка между деформациите и вътрешните усилия

Поради това, че черупката се разпъва и огъва, в напречните сечения ще възникнат нормални сили и огъващи моменти – фиг.13.8. Тези сили и моменти ще считаме, че са **за единица дължина**. При това индексът на нормалните сили показва съответното направление на силите, а индексът на огъващите моменти – равнината, в която действуват. Тогава те могат да се изразят чрез напреженията по следните изрази:



Фиг.13.8

$$N_x dy = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dydz \qquad N_y dx = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dxdz$$

$$M_x dy = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x zdydz \qquad M_y dx = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y zdxdz$$

(13.10)

Заместваме тук 13.9 и след изчисление на интегралите, получаваме:

(13.11)

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_0 + \mu\,\frac{w}{R}\right) \qquad N_y = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{w}{R} + \mu\varepsilon_0\right)$$

$$M_x = D\frac{d^2W}{dx^2} \qquad M_y = \mu\,D\frac{d^2W}{dx^2}$$

Тук D се нарича цилиндрична коравина на черупката.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \tag{13.12}$$

От 13.11 следва, че вътрешните усилия могат да се определят чрез напречното преместване W на средната повърхнина на черупката.

Нормалната сила N_y от 13.11 може да се изрази чрез W и усилието N_x:

$$N_y = \mu\, N_x + Eh\frac{w}{R} \tag{13.13}$$

Д) Уравнение на статиката

Разглеждаме диференциален елемент от черупката с действуващите върху него сили и моменти – фиг.13.9. Поради ососиметричността на задачата, усилията в кръгово направление (N_t, M_t) нямат нарастване, но в меридианно направление ще имат. Освен това, когато възникне променлив огъващ момент по направление на меридиана, възниква и срязваща сила (Q – с размерност сила на единица дължина). Записваме уравненията за равновесие:

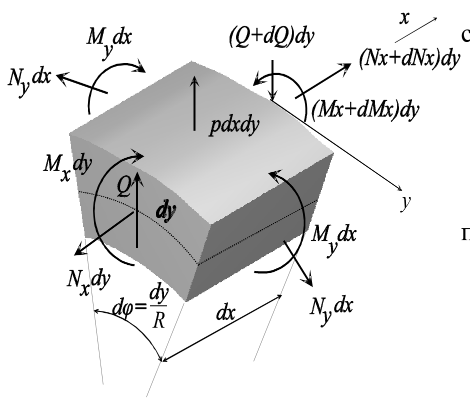
$$\sum x = 0 \;\rightarrow\; (N_x + dN_x)dy - N_x dy = 0 \;\rightarrow\; N_x = const \tag{13.14}$$

$$\sum M_y = 0 \;\rightarrow\; (M_x + dM_x)dy - M_x dy - Qdydx = 0 \;\rightarrow\; \frac{dM_x}{dx} = Q \tag{13.15}$$

$$\sum Z = 0 \;\rightarrow\; (Q + dQ)dy - Qdy - pdxdy + 2N_y dx \sin\frac{d\varphi}{2} = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \frac{dQ}{dx} = p - \frac{N_y}{R} \tag{13.16}$$

Е) Диференциално уравнение на цилиндричната черупка



Фиг.13.9

От последните две уравнения следва:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = p - \frac{N_y}{R} \tag{13.17}$$

Заместваме 13.17 в 13.11 и получаваме:

$$\frac{d^4W}{dx^4} + 4k^4W = \frac{p}{D} - \frac{\mu}{RD}N_x \tag{13.18}$$

където
$$4k^4 = \frac{Eh}{R^2D} = \frac{12(1-\mu^2)}{R^2h^2} \tag{13.19}$$

Уравнение 13.18 е диференциалното уравнение на цилиндрична черупка при ососиметрично натоварване. Нормалната сила N_x от дясно се счита за известна. Решението на 13.18 може да се представи във вида:

$$W = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) + W^* \qquad (13.20)$$

където W^* - частно решение на диференциално уравнение 13.18, зависещо от налягането p.

При дълги черупки в левия край ($x \to 0$) доминира първото събираемо и второто може да се изпусне от решението. Обратно – в десния край ($x \to l$) доминира второто събираемо и първото може да се изпусне. Така се опростява определянето на интеграционните константи.

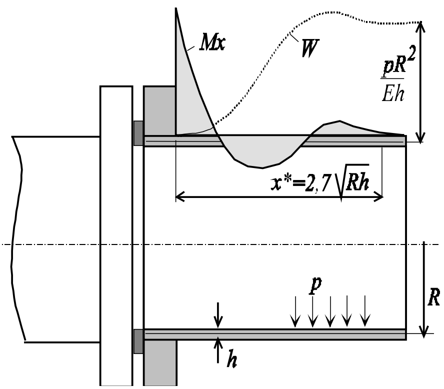
Ж) Определяне на напреженията

След определяне на преместването W, чрез 13.11 могат да се определят вътрешните усилия, а чрез тях – напреженията. От сравнението на 13.9 и 13.11 следва:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} + \frac{12M_x}{h^3} z \qquad \sigma_y = \frac{N_y}{h} + \frac{12M_y}{h^3} z \qquad (13.21)$$

Тези изрази показват, че напреженията се разпределят линейно по дебелината на черупката. Максималните стойности на напреженията ще получим при $z = \pm h/2$:

$$\sigma_{x,\max} = \frac{N_x}{h} \pm \frac{6M_x}{h^2} \qquad \sigma_{y,\max} = \frac{N_y}{h} \pm \frac{6M_y}{h^2} \qquad (13.22)$$



Фиг.13.10

където (+) се взема за вътрешния слой на черупката.

З) Пример 13.2. Дълга цилиндрична тръба с недеформируем фланец в единия си край (фиг.13.10) е натоварена с вътрешно налягане p. Да се определят напреженията в областта на фланеца. Дадено: R, h, E, μ.

Частното решение на 13.18 при $p=const$ е:

$$W^* = \frac{p}{4k^4 D} \qquad (a)$$

Общото решение за левия край на тръбата ще бъде:

$$W = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + \frac{p}{4k^4 D} \qquad (б)$$

Граничните условия за определяне на константите са: При $x=0 \rightarrow W=0$ и $W'=0$. От тук определяме, че:

$$C_1 = C_2 = -\frac{p}{4k^4 D} \qquad (в)$$

Тогава общото решение (б) придобива вида:

$$W = \frac{p}{4k^4 D}\left(1 - e^{-kx}(\sin kx + \cos kx)\right) \qquad (г)$$

При достатъчно голямо x второто събираемо в скобите клони към нула и преместването приема постоянна стойност, равна на величината $p/4k^4D$, която на основание 13.19 става pR^2/Eh. Тази стойност на преместването можем да получим и от безмоментната теория на черупките:

$$\text{от} \quad \varepsilon_t = \frac{W}{R} = \frac{\sigma_t}{E} \quad \rightarrow \quad W = \frac{\sigma_t R}{E} = \frac{pR^2}{Eh} \qquad (д)$$

За да установим на какво разстояние от фланеца преместването е постоянно (нямаме огъване), приравняваме второто събираемо на някакво малко число спрямо единицата – например 0,05 (т.е.5%):

$$e^{-kx}(\sin kx + \cos kx) \leq 0{,}05 \qquad (е)$$

Решението на това неравенство (при коефициент на Поасон $\mu=0.3$) дава за $x^* \approx 2{,}7(Rh)^{1/2}$. При $h \leq R/20$ (за тънкостенни черупки), получаваме $x^* \approx 2{,}7(Rh)^{1/2}=0{,}6R.$, т.е. огъването на черупката има локален характер, проявяващо се на границата с фланеца, поради което това явление носи названието **граничен ефект**. (На фиг.13.10 разстоянието x^* е увеличено).

За да определим напреженията в областта на запъването, определяме предварително вътрешните усилия, като използуваме уравнения 13.11, където $\varepsilon_0=0$. Поради това, че в запъването $W=0$, то $Nx=Ny=0$. Остават огъващите моменти Mx и $My=\mu Mx$. Огъващият момент Mx ще бъде:

$$M_x = DW'' = \ldots = D\frac{p}{4k^4 D}2k^2 e^{-kx}(\cos kx - \sin kx) = \frac{p}{2k^2}e^{-kx}(\cos kx - \sin kx) \qquad (ж)$$

Максималната стойност на момента, съответно на меридианното напрежение, ще получим при x=0:

$$M_{x,\max} = \frac{p}{2k^2} = \ldots = \frac{prh}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} \quad \rightarrow \tag{з}$$

$$\rightarrow \quad \sigma_{x,\max} = \pm 6\frac{M_x}{h^2} = \pm \frac{6}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\frac{pr}{h} = \pm 1{,}82\frac{pr}{h}\bigg|_{\mu=0,3}$$

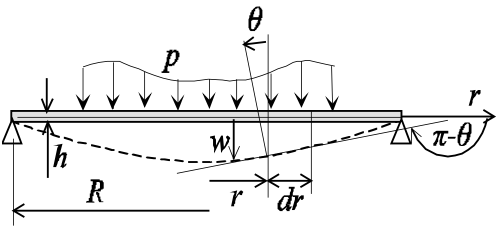
Това напрежение е 3,63 пъти по-голямо от напрежението *pr/2h* , което дава безмоментната теория.

Изводът, който може да се направи е, че в областите на закрепванията на черупките напреженията следва да се пресмятат по моментната теория. Подобно силно увеличение на напреженията се наблюдава и в местата на преход от една към друга форма на черупката. За намаляването на напреженията в тези зони се препоръчва плавни преходи.

В [17] е разработен софтуер, позволяващ анализ на произволна ососиметрична черупка по моментната теория.

13.3. Огъване на кръгли, симетрично натоварени плочи

Когато средната повърхнина на черупката е равнина, получаваме **плоча**. Тук ще разгледаме огъване на **кръгли плочи**, подложени на ососиметричен товар – фиг.13.11.



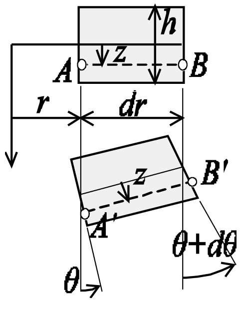
Фиг. 13.11

Основните предпоставки при извода на уравненията на кръглите плочи са:

- Плочата е с постоянна дебелина *h*.
- Максималното преместване не превишава *h/2,* а *R*≥ 5*h*.
- Натоварването е ососиметрично.
- В сила е хипотезата на Кирхоф (формулирана в предидущия параграф)
- Взаимодействие между пластовете на плочата по направление на нормалата липсва.
- Средната повърхнина на плочата е неутрална.

А) Геометрически зависимости.

Разглеждаме диференциален елемент (кръгов пръстен) на разстояние r от центъра на плочата с дължина dr – фиг.13.12. Отсечка AB, отстояща на разстояние z от неутралния пласт след огъването на плочата получава деформация по направление на радиуса, която ще бъде:



Фиг.13.12

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\left(dr + z(\theta + d\theta) - z\theta\right) - dr}{dr} = z\frac{d\theta}{dr} \tag{13.23}$$

Тук θ - ъгъл на завъртване на нормалата към средната повърхнина на плочата.

Дължината на окръжността, минаваща през т.А преди и след деформацията ще претърпи промяна, следователно ще имаме и деформация в окръжно направление:

$$\varepsilon_t = \frac{L_{A'} - L_A}{L_A} = \frac{2\pi\,(r + z\theta) - 2\pi\, r}{2\pi r} = z\frac{\theta}{r} \tag{13.24}$$

Б) Физически зависимости

Деформациите по радиуса и в окръжно направление ще породят нормални напрежения σ_r и σ_t, които на основание на обобщения закон на Хук за равнинно напрегнато състояние и зависимости 13.23 и 13.24 ще бъдат:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\,\varepsilon_t) = \frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{d\theta}{dr} + \mu\frac{\theta}{r}\right)$$
$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t + \mu\,\varepsilon_r) = \frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\theta}{r} + \mu\frac{d\theta}{dr}\right) \tag{13.25}$$

От тук виждаме, че напреженията се разпределят линейно по дебелината на плочата.

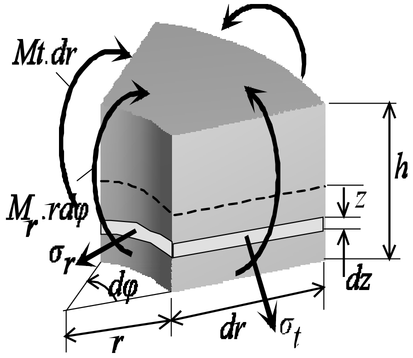
В) Връзка между напреженията и вътрешните усилия

На фиг.13.13 е показан диференциален елемент, изрязан от плочата с две радиални равнини, завъртяни на ъгъл $d\varphi$ и две цилиндрични повърхнини, отстоящи на разстояние dr. Неравномерното разпределение на напреженията по дебелината ще породят огъващи моменти, които ще считаме, че действуват на единица дължина. Тези моменти ще бъдат:

$$M_r r d\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r r d\varphi\; dz) z \qquad M_t dr = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_t dr\, dz) z \tag{13.26}$$

Заместваме тук 13.25 и след интегриране, получаваме:

$$M_r = D\left(\frac{d\theta}{dr} + \mu\,\frac{\theta}{r}\right) \qquad M_t = D\left(\frac{\theta}{r} + \mu\,\frac{d\theta}{dr}\right) \tag{13.27}$$



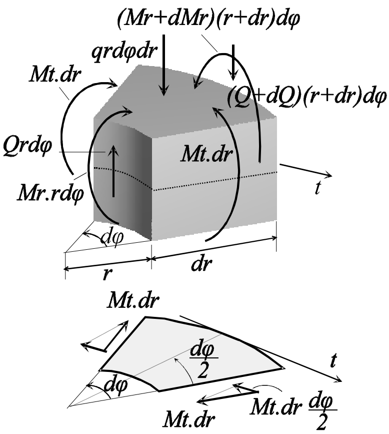
Фиг.13.13

където D се нарича **цилиндрична коравина на плочата**:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \tag{13.28}$$

Г) Уравнение на статиката

Разглеждаме отново диференциален елемент от плочата с действуващите върху него усилия – фиг.13.14. Поради ососиметричността на задачата огъващите моменти в кръгово направление (M_t) няма да имат нарастване. Наличието на променлив радиален момент (M_r) ще породи променлива срязваща сила (Q), която считаме, че действува също на единица дължина. Записваме сумата от моментите около тангентата t:



Фиг.13.14

(13.29)

$$(M_r + dM_r)(r + dr)d\varphi - M_r r d\varphi + Qrd\varphi\, dr +$$

$$+ prd\varphi\, dr\frac{dr}{2} - 2M_t dr\frac{d\varphi}{2} = 0$$

След опростяване на този израз и пренебрегвайки малките величини от по-висш порядък, получаваме:

(13.30)

$$\frac{d}{dr}(M_r r) - M_t + Qr = 0$$

Д) Диференциално уравнение на кръглата плоча

Заместваме моментите от 13.27 в 13.30 и след опростяване, получаваме:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\theta\, r)\right) = -\frac{Q}{D} \tag{13.31}$$

Полученото диференциално уравнение 13.31 е уравнението на кръглата плоча, натоварена ососиметрично. Срязващата сила Q в дясната страна на уравнението се определя посредством уравнение на статиката, написано за елемент, изрязан около центъра на плочата за всеки конкретен случай (това ще покажем на пример).

След двукратно интегриране, за решението на диференциално уравнение 13.31 получаваме:

$$\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{Dr}\int \left(r\int Qdr \right) dr \tag{13.32}$$

където C_1, C_2 – интеграционни константи, които определяме от граничните условия на закрепване и натоварване на плочата. Ако плочата има n участъка, броят на тези константи ще бъде очевидно $2n$.

След определянето на ъгъла на наклона на нормалата θ, с помощта на уравнения 13.27 определяме огъващите моменти.

Е) Определяне на напреженията

Като използваме огъващите моменти 13.27, уравненията за напреженията могат да се запишат в следния вид:

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3} z \qquad \sigma_t = \frac{12M_t}{h^3} z \tag{13.33}$$

Максималните стойности на напреженията в конкретно сечение ще получим при $z = \pm h/2$:

$$\sigma_{r,\max} = \pm \frac{6M_r}{h^2} \qquad \sigma_{t,\max} = \pm \frac{6M_t}{h^2} \tag{13.34}$$

където знака (+) се взема за долния слой на плочата.

Ж) Определяне на преместването

От фиг.13.11 при малки премествания на плочата е в сила следната геометрическа зависимост:

$$\frac{dW}{dr} = tg(\pi - \theta) = -tg\theta \approx -\theta \tag{13.35}$$

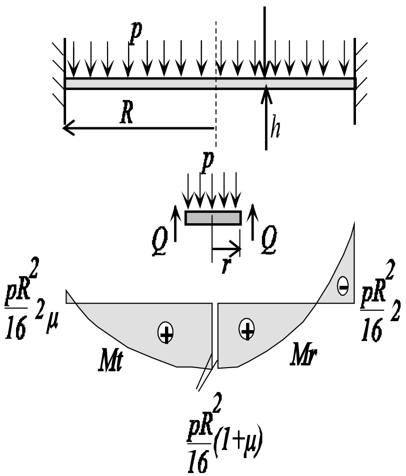
От това диференциално уравнение след интегриране можем да получим напречното преместване на средната повърхнина на плочата:

$$W = -\int \theta \, dr + C_3 \tag{13.36}$$

където C_3 – нова интеграционна константа, която определяме от условията на закрепване на плочата.

*3) **Пример 13.3.*** Да се определи максималното допустимо налягане върху дъното на водосъдържателя от задача 13.1, предполагайки, че то е плоско. Дадено: $R=0,16$ *m*, $h=2,5$ *mm*, $[\sigma]=160$ *Mpa*.

При плоско дъно на водосъдържателя ще получим кръгла плоча, която приемаме за запъната по краищата и натоварена с равномерно разпределено налягане p – фиг.13.15.



Фиг.13.15

Изрязваме елемент около центъра на плочата с текущ радиус r (елементът е показан под плочата) и написваме условието за равновесие по ос Z:

$$\sum z=0 \rightarrow p\pi r^2 - Q2\pi r=0 \rightarrow Q=\frac{pr}{2} \qquad (а)$$

Заместваме в 13.32 и получаваме:

$$\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{pr^3}{16D} \qquad (б)$$

Граничните условия за определяне на константите са:

1. При $r=0 \rightarrow \theta=0 \rightarrow C_2=0$.
2. При $r=R \rightarrow \theta=0 \rightarrow C_1=pR^2/(16D)$. От тук за θ получаваме:

$$\theta = \frac{p}{16D}\left(R^2 r - r^3\right) \qquad (в)$$

С помощта на 13.27 определяме огъващите моменти:

$$M_r = \frac{p}{16}\left(R^2(1+\mu) - r^2(3+\mu)\right) \qquad M_t = \frac{p}{16}\left(R^2(1+\mu) - r^2(1+3\mu)\right) \qquad (г)$$

Диаграмите на двата момента са показани на фиг.13.15. От тях определяме, че максимален огъващ момент (радиален) получаваме в сечението на запъването. Максималните напрежения в това сечение ще възникнат в горния слой на плочата и ще бъдат:

$$\sigma_r = \frac{6M_r}{h^2} = 2\frac{pR^2}{16}\frac{6}{h^2} = \frac{3}{4}\frac{pR^2}{h^2} \qquad \sigma_t = \frac{6M_t}{h^2} = 2\mu\frac{pR^2}{16}\frac{6}{h^2} = \frac{3}{4}\mu\frac{pR^2}{h^2}$$

(д)

Главните напрежения са $\sigma_1=\sigma_r$, $\sigma_2=\sigma_t$, $\sigma_3=0$, откъдето $\sigma_{екв}^{III}=\sigma_1-\sigma_3=\sigma_t$.

$$\sigma_{екв}^{III} = \frac{3}{4}\frac{pR^2}{h^2} \le [\sigma] \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad [p] \le \frac{4[\sigma]h^2}{3R^2} = \frac{4.160.10^6.0{,}0025^2}{3.0{,}16^2} = 0{,}52.10^5\,Pa \approx 0{,}5\,atm$$

(е)

Получихме резултат, показващ, че плоските дъна са абсолютно неподходящи за съдове под налягане. В случая при налягане *1 atm* материалът ще достигне границата на провлачване. Експериментът показва, че при налягане *10 atm* конкретният водосъдържател с плоски дъна получава големи необратими пластични деформации, като се оформя издуване на дъното във вид на сферична повърхност.

В гл.18 тази задача ще бъде решена с помощта на разработения в [17] софтуер, като цилиндричната част на водосъдържателя и дъното (сферично или плоско) ще бъдат разгледани съвместно.

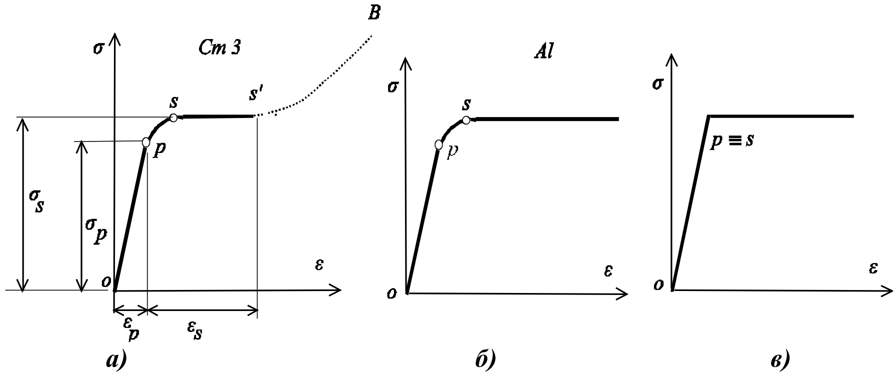
Гл. 14. ПРЕСМЯТАНЕ НА КОНСТРУКЦИИТЕ НАД ГРАНИЦАТА НА ЕЛАСТИЧНОСТ

14.1. Особености на изчислението и схематизация на диаграмата на опън

До тук при оразмеряването на телата използувахме главно метода на допустимите напрежения, разгледан подробно в гл.5. Ще припомним, че съгласно този метод търсим максималното еквивалентно напрежение в тялото и го сравняваме с допустимото напрежение за материала. Оказва се, че за крехки материали, при които границата на пропорционалност е много близка до границата на разрушение, този метод е напълно оправдан, но за жилави материали с площадки на провлачване, за които границата на пропорционалност е много по-ниска от границата на разрушение, този метод води до преоразмеряване на телата, водещ съответно до по-голям разход на материал. Това е така, защото настъпване на пластични деформации в една единствена точка от натовареното тяло не означава още големи деформации или разрушение на тялото, защото напреженията във всички други точки в повечето случаи са далече под границата на пластичност.

Тук ще разгледаме основите на изчисление на конструкции над границата на еластичност. В тези случаи една от главните предпоставки за решение на задачата е да уточним вида на диаграмата напрежение-деформация при опън/натиск.

Както е известно, диаграмата на опън за жилави материали (като Ст3) до границата на разрушение има вида, показан на фиг.4.1-а.

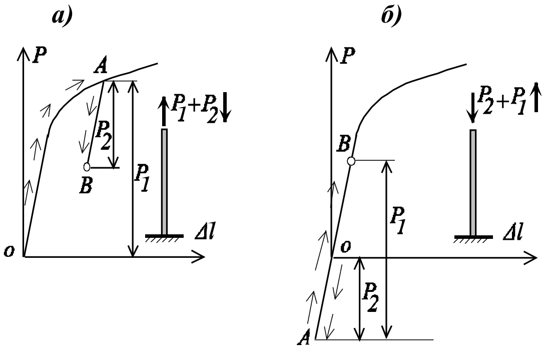


Фиг. 14.1. Реални и идеализирана диаграма σ-ε на опън

В диаграмите σ-ε за жилави материали е винаги налице зона на еластична деформация ε_p и зона на пластична деформация ε_s на материала, при което $\varepsilon_s >> \varepsilon_p$. Подобно е положението и за други материали, като алуминия, диаграмата на опън на който има вида, показан на фиг.14.1-б, с тази разлика, че след достигане границата на провлачване, материалът няма зона на уякчаване, а се провлачва до пълното разрушение, при което пластичната деформация е много по-голяма от еластичната. Това е дало основание за този вид материали да се работи с идеализирана диаграма на опън, показана на фиг.14.1-в, състояща се само от две прави линии – наклонена и хоризонтална, при което в ъгловата точка границата на пропорционалност съвпада с границата на провлачване. Тази диаграма се нарича **диаграма на идеалната пластичност** или **диаграма на Прандтъл**. По-нататък ще считаме, че при опън/натиск материалът се подчинява на тази зависимост. Тъй като зависимостта между напрежение и деформации е линейна само на определени участъци, а не за цялата област на изменение на напреженията и деформациите, казваме, че имаме **физически нелинеен материал.**

Възниква въпросът дали в този случай са валидни останалите принципи на Съпротивление на материалите – принципът на началните размери, принципа за независимото действие, хипотезата на Бернули и др.

Принципът на началните размери е свързан с големината на деформациите спрямо началните размери на тялото. Така, че ако пластичните деформации са малки, (дотогава, докато може да се приеме, че $\sin\theta = \theta$, където θ - ъгъл на завъртване на елементарна отсечка от тялото), този принцип остава в сила. При големи пластични деформации (например ковашко-пресовите операции) този принцип е вече неприложим. В този случай говорим за **геометрически нелинейни задачи**. (*Забележка:* Понякога са възможни големи деформации и в границата на валидност на закона на Хук).



Фиг. 14.2

Що се отнася до принципа за независимото действие на силите, то в случая на физическа нелинейност той е абсолютно неприложим. Това може да се види от фиг.14.2. В случай а) две сили P_1 – опънова и P_2 – натискова, са приложени върху прът в последователност P_1, P_2, а в случай б) – в обратна последователност – P_2, P_1. Виждаме, че в края на процеса на натоварване (т.В) деформацията на пръта е съвършено различна.

Кой е критерият, съгласно който при наличие на пластични деформации се оразмеряват конструкциите ? Прието е за такъв да се счита състоянието на преминаване на конструкцията в **гранично състояние** – състояние, при което конструкцията престава да се съпротивлява на външния товар (превръща се в механизъм) или престава да удовлетворява определени експлоатационни изисквания.

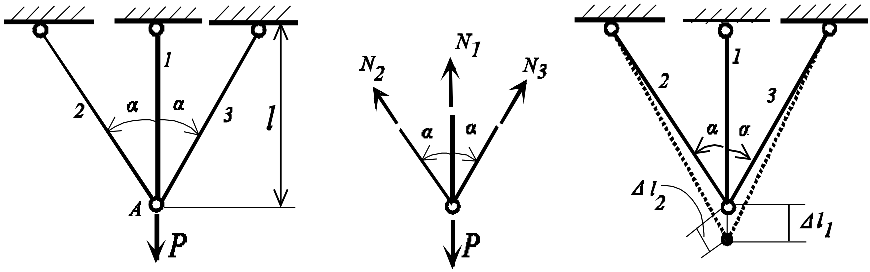
Поради тази твърде обща формулировка, оразмеряването над границата на пропорционалност за всяка отделно взета задача е уникално. Необходимо е да се прецени при какви условия конструкцията се превръща в механизъм. Очевидно този подход е възможен само за неособено сложни конструкции. Ще разгледаме поотделно оразмеряването при опън/натиск, усукване и огъване, като за всеки отделен случай ще извършим сравнение на получените резултати с оразмеряването по метода на допустимото напрежение.

14.2. Пресмятане на системи, работещи на опън/натиск в пластичната област

Тъй като при опън/натиск напреженията се разпределят равномерно в напречното сечение, то за статически определени системи, работещи на опън/натиск, методът на изчисление по допустими напрежения и по гранично състояние води до едни и същи резултати.

Не така стои въпросът при анализ на статически неопределени прътови системи. За целта ще разгледаме три пръта с еднакви напречни сечения, свързани и натоварени съгласно фиг.14.3. Задачата е да се определи максималната товароносимост на конструкцията, ако е известно, че границата на пластичност за материала на прътите е σ_s. Изследването ще извършим по двата метода – по метода на допустимите напрежения и по метода на граничното състояние. Резултатите по метода на допустимите напрежения ще индексираме със 'σ', а по метода на граничното състояние – със '*гр*'.

А) Изчисление по метода на допустимите напрежения



Фиг.14.3

Задачата е един път статически неопределена. Поради симетрията на конструкцията и натоварването $N_2=N_3$. Уравнението на статиката за равновесието на възел А има вида:

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 + 2N_2\cos\alpha = P \tag{а}$$

Деформационното уравнение има вида:

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cos\alpha \quad \rightarrow \quad \frac{N_2 l}{EF\cos\alpha} = \frac{N_1 l}{EF}\cos\alpha \quad \rightarrow \quad N_2 = N_1\cos^2\alpha \tag{б}$$

След решаването на системата уравнения а) и б), получаваме:

$$N_1 = P\frac{1}{1+2\cos^3\alpha} \qquad N_2 = N_3 = P\frac{\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha} \tag{в}$$

От полученото решение се вижда, че по-голямото усилие, съответно по-голямото напрежение, ще получим в средния прът, Приравняваме това напрежение на допустимото напрежение $[\sigma]=\sigma_s$ и получаваме:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_1}{F} = \frac{P}{F}\frac{1}{1+2\cos^3\alpha} = \sigma_s \quad \rightarrow \quad P_{\max,[\sigma]} = \frac{\sigma_s F}{1+2\cos^3\alpha} \tag{г}$$

Б) Изчисление по метода на граничното състояние

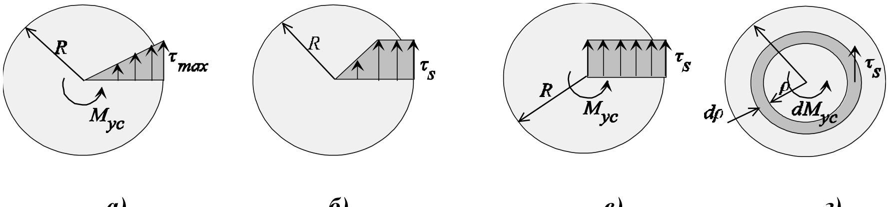
От това, че напреженията в средния прът са достигнали границата на провлачване, не значи, че конструкцията не може да бъде натоварена повече, тъй като напреженията в наклонените пръти са под границата на провлачване (опъновите сили в тях са по-малки). Граничното състояние ще настъпи, когато напреженията в трите пръта достигнат границата на провлачване. Тогава нормалните сили в тях ще бъдат равни на $N_1=N_2=N_3=\sigma_s F$. Заместваме тези стойности в уравнението на статиката а) и получаваме:

$$\sigma_s F + 2\sigma_s F\cos\alpha = P \quad \rightarrow \quad P_{\max,гр} = \frac{\sigma_s F}{1+2\cos\alpha} \qquad (д)$$

От сравнението на получените резултати г) и д) за максималната товароносимост при двата начина на изчисление, установяваме, че $P_{max,гр} > P_{max,\sigma}$. При $\alpha=30\,°$ ще получим, че $P_{max,гр}=1{,}19\,P_{max,\sigma}$, т.е изчислението по гранично състояние позволява увеличение товароносимостта на конструкцията с 19 %. Същевременно виждаме, че изчислението се опростява значително, отпада необходимостта от разкриване на статическата неопределеност.

14.3. Усукване на прът при наличие на еласто-пластични деформации

В гл.5 установихме, че при усукване на кръгъл вал разпределението на тангенциалните напрежения по произволно взет радиус при валидност на закона на Хук има вида, показан на фиг.14.4-а.



а) б) в) г)

Фиг. 14.4. Еласто-пластични напрежения при усукване на кръгъл вал

Ако приравним максималното напрежение на τ_s - границата на провлачване, ще получим, че максималният усукващ момент, който може да понесе вала, ще бъде:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{ус}}{W_p} = \tau_s \quad \rightarrow \quad M_{ус,\tau} = \tau_s W_p = \tau_s \frac{\pi D^3}{16} \qquad (14.1)$$

Всички останали точки от напречното сечение на вала, освен точките близо до периферията на вала, ще изпитват напрежения, които са по-малки от границата на провлачване и следователно валът може да бъде допълнително натоварен. На фиг. 14.4-б е показан случай, когато усукващият момент е нараснал до такава степен, че част от сечението на вала се намира в условията на еластични деформации, а друга част (външната) в условията на пластични деформации. Гранично състояние ще настъпи, когато напреженията в цялото напречно сечение на вала станат равни на напрежението τ_s - границата на провлачване. Усукващият момент в това състояние ще получим, като интегрираме елементарния усукващ момент от напреженията, действуващи по един елементарен кръгов пръстен:

$$dM_{ус} = \tau_s (2\pi \rho \, d\rho)\rho \quad \rightarrow \quad M_{ус,гр} = \int_0^{D/2} \tau_s 2\pi \rho^2 d\rho = \tau_s \frac{\pi D^3}{12} \qquad (14.2)$$

От сравнението на 14.1 и 14.2 може да се направи извода, че максималният усукващ момент, който може да понесе вала при изчисление по гранично състояние се увеличава с 33 % спрямо момента, получен по допустими напрежения. Величината

$$W_{p,пл} = \frac{\pi D^3}{12} \qquad (14.3)$$

се нарича **съпротивителен момент на усукване на кръгъл вал при пластични деформации**.

Доколкото съпротивителният момент (14.3) нараства спрямо обикновения съпротивителен момент за кръгло сечение (формула 6.10) с 33%, може да се направи извода, че дори при статически определени системи, работещи на усукване, максималната товароносимост, определена по метода на граничното състояние ще нарасне също с 33%. За статически неопределени системи това нарастване е още по-голямо, в което ще се убедим от следващата задача.

Пример 14.2: Да се определи максималната товароносимост на кръгъл вал, натоварен съгласно фиг.14.5-а, по метода на допустимите напрежения и метода на граничното състояние.

а) Изчисление по метода на допустимите напрежения

Системата е един път статически неопределена на усукване.

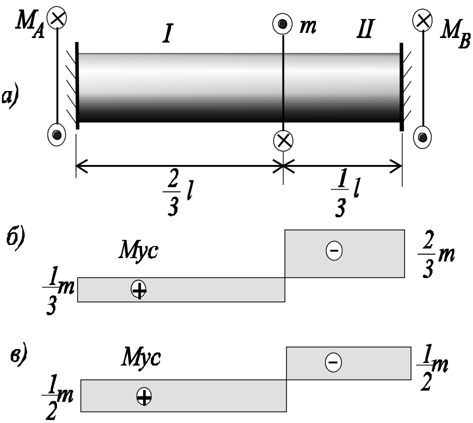
Уравнението на равновесие има вида:

$$M_A + M_B = m \qquad (a)$$

Деформационното уравнение е:

$$\varphi_I + \varphi_{II} = 0 \quad \to \quad \frac{M_A}{GJ_p}\frac{2}{3}l + \frac{(M_A - m)}{GJ_p}\frac{1}{3}l = 0 \tag{б}$$

След решението на системата (а) и (б), получаваме:



Фиг. 14.5

$$M_A = \frac{m}{3} \qquad M_B = \frac{2m}{3} \tag{в}$$

Диаграмата на усукващия момент в двата участъка има вида, показан на фиг. 14.5-б. Максимално тангенциално напрежение ще получим във втория участък. Приравняваме това напрежение на допустимото напрежение, което приемаме за границата на провлачване и получаваме:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{ус,\max}}{W_p} = \frac{2m.16}{3\pi D^3} = \frac{32}{3}\frac{m}{\pi D^3} = \tau_s \quad \to \quad m_{\max,[\tau]} = \frac{3}{32}\tau_s \pi D^3 \tag{г}$$

б) Изчисление по гранично състояние

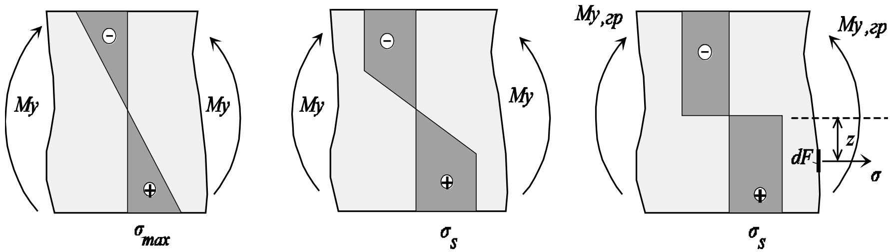
Гранично състояние ще настъпи, когато усукващите моменти в двата участъка добият граничната си стойност съгласно 14.2, т.е. моментите в двата участъка се изравнят. Заместваме тези гранични моменти в уравнението на равновесие (а) и получаваме:

$$\tau_s \frac{\pi D^3}{12} + \tau_s \frac{\pi D^3}{12} = m \quad \to \quad m_{\max,гр} = \frac{1}{6}\tau_s \pi D^3 \tag{д}$$

Сравнението на последните два израза показва, че максималният момент, получен по метода на граничното състояние е 1,78 пъти по-голям от момента, получен по метода на максималните допустими напрежения.

14.3. Еласто-пластично огъване на греда

Ще разгледаме елемент от греда, подложен на чисто специално огъване. Както е известно от гл.7, в напречното сечение възникват положителни и отрицателни нормални напрежения, които се разпределят линейно по височината на сечението – фиг.14.6-а, като главната инерционна ос *Y* на напречното сечение се явява неутрална линия.



Фиг.14.6. Еласто-пластично огъване на греда

При оразмеряването по допустими напрежения приравняваме максималното нормално напрежение на допустимото, откъдето получаваме максималната товароносимост на сечението:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} = [\sigma] = \sigma_s \quad \rightarrow \quad M_{\max,[\sigma]} = W_y \sigma_s \tag{14.4}$$

От това, че крайните точки на напречното сечение изпитват пластични деформации, носещата способност на сечението не се изчерпва, тъй като по-голямата част от него е доста по-слабо натоварена. Увеличавайки огъващият момент, все повече и повече точки попадат в условията на пластични деформации – фиг.14.6-б. Пълното изчерпване на носещата способност на сечението ще настъпи, когато напреженията в цялото сечение станат равни на границата на провлачване – фиг.14.6-в. При положение, че материалът се съпротивлява еднакво на опън и натиск, граничната стойност на огъващия момент от фиг.14.6-в ще бъде:

$$dM_y = \sigma_s dFz \quad \rightarrow \quad M_{y,гр} = \sigma_s \int\limits_{F_{оп}+F_н} zdF = \sigma_s (S_{оп} + S_н) \tag{14.5}$$

където $F_{оп}$, $F_н$ – площи от напречното сечение, изпитващи съответно опън и натиск.

Значението на граничния момент остава постоянно при по-нататъшното нарастване на товара. Мястото на възникването му се нарича **пластична става**, в смисъл, че в това сечение не може да бъде предаден огъващ момент, по-голям от граничния момент.

Положението на неутралната линия ще определим от условието, че нормалната сила при чисто огъване е равна на нула:

$$N = \int\limits_{F_{on}+F_н} \sigma_s dF = \sigma_s \left(\int\limits_{F_{on}} dF - \int\limits_{F_н} dF \right) = \sigma_s \left(F_{on} - F_н \right) = 0 \quad \rightarrow \quad F_{on} = F_н$$

(14.6)

Получихме, че площите на опънатата и натисната част от напречното сечение при чисто огъване в условията на гранично състояние са равни помежду си.

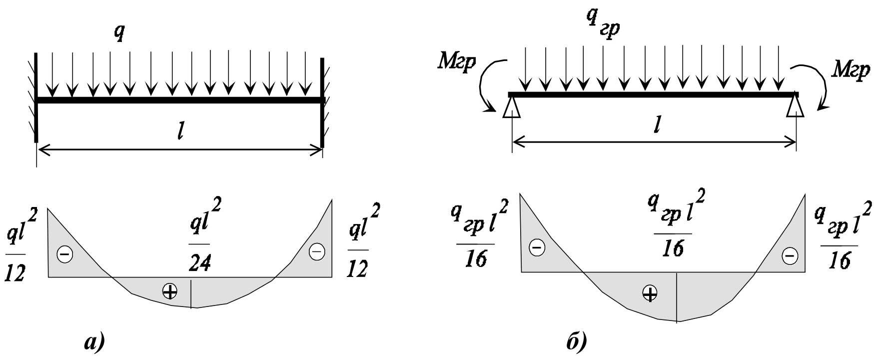
Сумата от статичните моменти на опънатата и натиснатата част от сечението спрямо неутралната линия в 14.5 се **нарича съпротивителен момент на огъване на сечението при пластични деформации.**

$$W_{y,пл} = S_{on} + S_н \tag{14.7}$$

Така за правоъгълно сечение с размери *b/h* статичните моменти на двете половини и съпротивителния момент ще бъдат:

$$S_{on} = S_н = b\frac{h}{2}\frac{h}{4} \quad \rightarrow \quad S_{on} + S_н = b\frac{h^2}{4} = W_{y,пл} \tag{14.8}$$

Както виждаме от 14.8, за правоъгълно сечение този съпротивителен момент е 1,5 пъти по- голям от обикновения съпротивителен момент на сечението при огъване – формула 7.9. За двойно Т-образни профили е установено, че това повишаване средно е 1,18 пъти. От тук следва, че за статически определени греди товароносимостта, определена по гранично състояние, се повишава от 18% до 50 %. За статически неопределените системи това повишение е още по-голямо.



Фиг. 14.7

Пример.14.3. Да се определи максималния разпределен товар, който може да понесе двустранно запъната греда (фиг.14.7) с коравина на огъване

EJy=const по метода на допустимите напрежения и метода на граничното състояние.

а) Изчисление по метода на допустимите напрежения

Поради симетрията, гредата е един път статически неопределена. Чрез тримоментовото уравнение, разгледано в гл.10, лесно определяме диаграмата на огъващия момент – фиг.14.7-а. Максималния момент се получава в запъването. Максималното значение на разпределения товар ще получим, приравнявайки максималното напрежение в това сечение на допустимото напрежение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y,\max}}{W_y} = \frac{ql^2}{12W_y} = [\sigma] = \sigma_s \quad \rightarrow \quad q_{\max,[\sigma]} = 12\frac{W_y}{l^2}\sigma_s \tag{а}$$

б) Изчисление по метода на граничното състояние

Необходимо е да определим онова състояние, при което гредата ще се превърне в механизъм. Ако увеличим външния товар, огъващият момент ще придобие граничната си стойност $M_{гр}= \sigma_s W_{y,\,пл.}$ най-напред в запъването и ще остане постоянен. От тук нататък гредата ще работи по схемата, показана на фиг.14.7-б. Увеличаваме външния товар, докато в другото опасно сечение -средата на гредата, се образува трета пластична става, при което гредата се превръща в механизъм. Това състояние ще бъде граничното състояние на гредата. Големината на огъващия момент в средата на гредата приравняваме на граничния момент, откъдето ще получим максималната стойност на разпределения товар:

$$M_{y,\max}\Big|_{x=l/2} = \frac{q_{гр}l^2}{8} - M_{гр} = M_{гр} \quad \rightarrow \quad q_{\max,гр} = \frac{16M_{гр}}{l^2} = 16\frac{W_{y,пл}}{l^2}\sigma_s \tag{б}$$

Сравнявайки получените стойности за максималния разпределен товар по двата метода, установяваме, че тяхното отношение е:

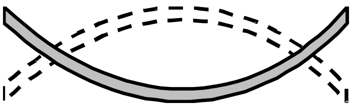
$$\frac{q_{\max,гр}}{q_{\max,[\sigma]}} = \frac{16W_{y,пл}}{12W_y} \tag{в}$$

Ако заместим тук съпротивителните моменти за правоъгълно сечение, ще получим за отношението (в) числото 2, т.е изчислението по гранично състояние дава два пъти по-голям разпределен товар, отколкото изчислението по допустими напрежения.

Гл. 15. ЯКОСТ ПРИ ЦИКЛИЧНО НАТОВАРВАНЕ

15.1. Понятие за якостна умора. Основни характеристики на цикъла.

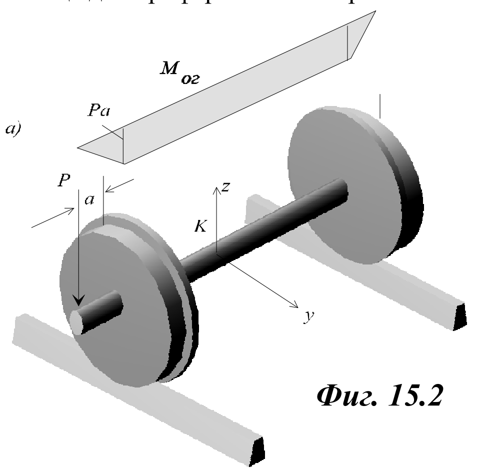
Циклично натоварване имаме тогава, когато напрежението в определена точка от тялото се изменя по някакъв закон във времето, периодично повтарящ се. Опитът показва, че при такова натоварване при определени условия разрушението може да настъпи много по-бързо, отколкото тялото бъде натоварено статично, дори с по-голямо по модул напрежение.



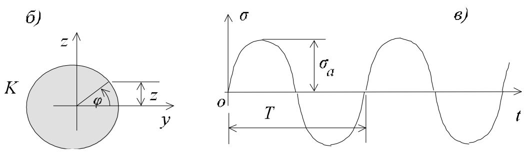
Фиг.15.1

Доказателство за това твърдение получаваме от следния елементарен пример: ако огънем парче метална тел веднъж, тя може да не се счупи на две, но ако повторим това няколко пъти, разрушението е сигурно – фиг.15.1. При това броят на циклите на огъване до разрушението зависи не от честотата на огъване, а от това колко силно е огъната телта, т.е, от напрежението, създадено в нея.

Циклично натоварване имаме почти винаги, където има въртящи се части. Така например вагонна ос (фиг.15.2) между двете колела е натоварена на чисто специално огъване. Огъващият момент в произволно сечение ‘К’ ще бъде *Мог = Ра*. Напрежението в една конкретна точка, лежаща до периферията на напречното сечение ще бъде:



Фиг. 15.2



При движение на влака оста се върти и координатата z (фиг.12.5-б) ще се изменя във времето по закона:

$$z = \frac{d}{2}\sin\omega\ t$$

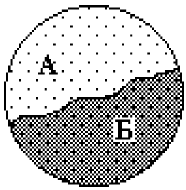
където d- диаметър на оста, ω - ъглова скорост на въртене на оста. Тогава напрежението ще получим във вида:

$$\sigma = \frac{M_{ог}}{J_y}z = \frac{Pa}{J_y}z$$

$$\sigma = \frac{Pa}{J_y}\frac{d}{2}\sin\omega\ t$$

т.е., напрежението се изменя във времето по закона на синуса.

Подобно е положението в коляновите валове, мотовилките и др. детайли на двигателите с вътрешно горене, във валове на редуктори, корабни валопроводи и др. При неправилно оразмеряване на такива детайли те могат да се разрушат много преди настъпване на предвидения експлоатационен срок. Разрушението в такива случаи настъпва без предизвестие, така, че често последиците са фатални.



Фиг.15.3

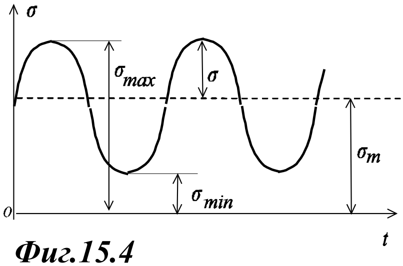
Напречното сечение на разрушения детайл при циклично натоварване изглежда като показаното на фиг.15.3 сечение. Различават се отчетливо две зони: зона А – гладка зона с възможна корозия на повърхността и зона Б- зона на току що разрушен метал с отчетлива структура, видима и с невъоръжено око.

Механизмът на разрушението е следният: разрушението започва в зона А в точка, в която е налице някакъв **концентратор на напрежение** – драскотина по повърхността, малка пукнатина, шупла, неметално включване и др. С всеки следващ цикъл пукнатината се увеличава (това може да трае понякога и месеци), докато напречното сечение изтънее дотолкова, че не е в състояние да понесе повече товара. Така зона А се получава гладка от непрекъснатото притриване на двете повърхности на пукнатината, а зона Б е зона на крехко разрушение.

В миналото се че считало, че причината за разрушението се явява т.н. **умора** на материала от дългата работа. Съвременните изследвания на структурата на метала в разрушената зона показват, че в него не настъпват никакви химически промени, но по традиция това разрушение на металите при циклично натоварване често се нарича **умора на металите**.

Теоретичният анализ на умората на материалите е свързана с теорията на разпространение на пукнатините, която се базира на усложнен математически апарат, поради което не е удобна за инженерната практика. Тук ще се запознаем с инженерната теория за якостна умора, построена върху теоретико – емпирични зависимости.

А) Основни характеристики на цикъла



Фиг.15.4

Нека в определена точка от натоварения детайл напрежението се изменя по закона, изобразен на фиг. 15.4. Въвеждаме следните понятия:

Амплитудна стойност на напрежението *(σ_a):*

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \qquad (15.1)$$

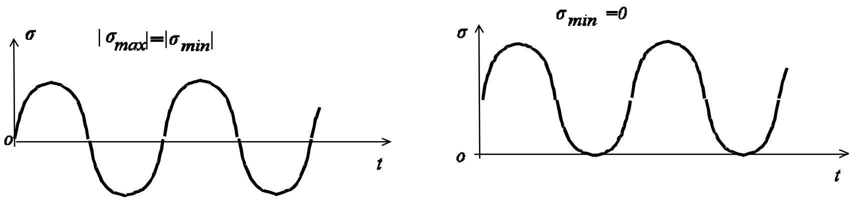
Средна стойност на напрежението *(σ_m):*

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \qquad (15.2)$$

Коефициент на асиметрия на цикъла *(r):*

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \qquad (15.3)$$

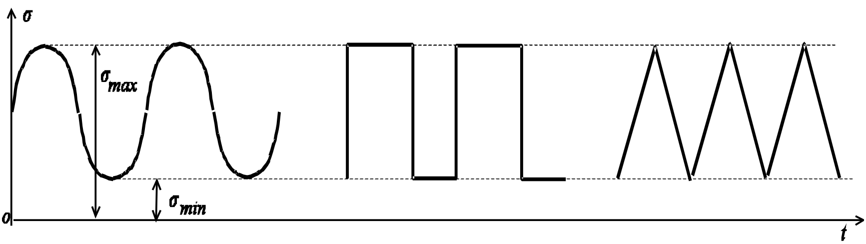
Според значението на коефициента на асиметрия ***r*** циклите биват **симетрични** *(r= -1)* – фиг.15.5-а, **пулсиращи** *(r=0)*- фиг.15-5-б и **асиметрични** – фиг.15.4.



а) ***б)***

Фиг.15.5

Цикли с еднакъв коефициенти на асиметрия (фиг.15.6) се наричат **подобни**. Опитът показва, че при един и същ коефициент на асиметрия, както е показано на фиг.15.6, характерът на изменение на напрежението няма значение за якостната умора на материала.

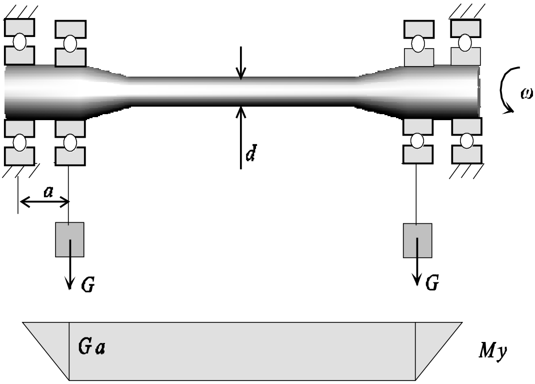


Фиг.15.6

Б) Граница на якостна умора

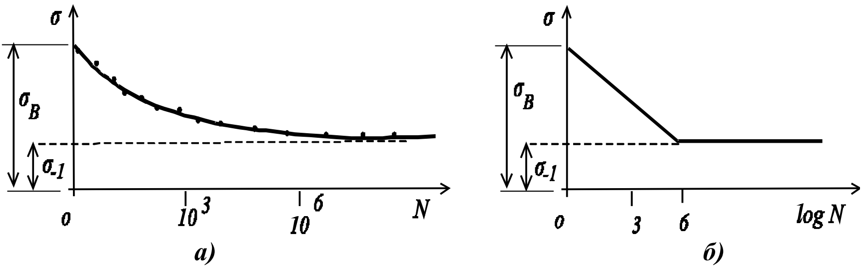
За всеки материал съществува такова напрежение, при което той не се разрушава при неограничен брой цикли. Това напрежение се нарича **граница на якостна умора** на материала и се бележи с σ_{-1} – при симетричен цикъл, σ_0 - при пулсиращ цикъл.

Границата на якостна умора за даден материал се получава експериментално на специални машини – фиг.15.7. Епруветката се закрепва в специални лагери, натоварва се съобразно коефициента на асиметрия на цикъла, като се създават съответните напрежения и се привежда във въртене, докато се разруши. Резултатите от изпитанието се нанасят в диаграма – фиг.15.8–а, на която по абсцисната ос са нанесени циклите N, които епруветката е издържала до разрушението, а по ординатната ос – амплитудната стойност на напрежението σ_a. Тази диаграма се нарича **диаграма на Вьолер**. Такива експерименти се правят с достатъчен брой епруветки (обикновено10-12), като за всяка епруветка се изменя натоварването. Поради това, че броят на циклите е голямо число, по-удобно е по абсцисната ос да се нанася $LogN$ – фиг.15.8-б.



Фиг.15.7. Изпитване на умора

Очевидно подобни изпитания траят доста дълго – една епруветка се подлага на милиони цикли, докато се разруши. От друга страна за получаване на повече експериментални точки са нужни изпитания на по-голям брой епруветки. Поради тази причина машините за якостна умора се въртят при високи обороти – до 20000 об/мин.



Фиг. 15.8

От многобройните опити е установено, че максималния брой цикли, до които е необходимо да се изпитват различните материали, са: за обикновени стомани $N=10^7$ цикли, за цветни метали – $N=10^8$ цикли. Ако съответния материал издържи указания брой цикли, той ще издържи и много повече цикли.

Установено е също, че границата на якостна умора може да се определи ориентировъчно чрез границата на разрушението посредством следните зависимости:

За обикновени стомани: $\sigma_{-1} \approx (0{,}4 \div 0{,}5)\sigma_B$, $\tau_{-1} \approx 0{,}5\sigma_{-1}$.

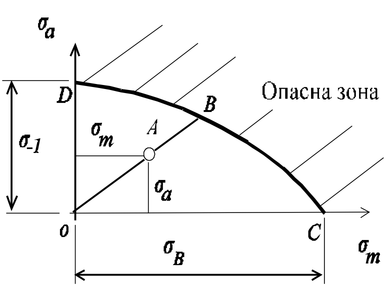
За високоякостни стомани: $\sigma_{-1} \approx 400 + \sigma_B/3$ [Mpa].

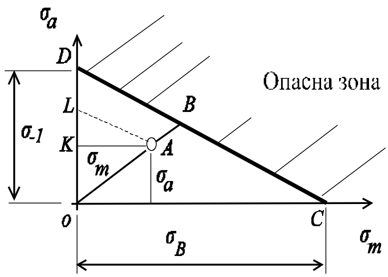
За цветни метали: $\sigma_{-1} \approx (0{,}25 \div 0{,}5)\sigma_B$.

Препоръчително е обаче за всеки материал границата на якостна умора да се взема от съответните справочници. Ориентировачни данни за границата на якостна умора за различни материали са приведени в Приложение 2.

В) **Диаграма на якостна умора. Коефициент на сигурност.**

По-горе видяхме как се получава експериментално границата на якостна умора за симетричен цикъл. При оразмеряване на детайли, натоварени при такива цикли, якостното условие ще бъде максималното амплитудно напрежение да не превиши границата на якостна умора.





Фиг.15.9. Диаграма на якостна умора

При произволен коефициент на асиметрия на цикъла се строи т.н. диаграма на якостна умора, която се строи в координати σ_m-σ_a – фиг.15.9-а. Точка *C* ($\sigma_m = \sigma_B$, $\sigma_a = 0$) от тази диаграма сьответствува на статично натоварване на образеца, а точка *D* ($\sigma_m = 0$, $\sigma_a = \sigma_{-1}$) – на натоварване при симетричен цикъл. Оказва се, че при друга комбинация от напреженията σ_m,σ_a, координатите на тези напрежения оформят крива, наподобяваща елипса. Тази крива наричаме **диаграма на якостна умора**, представляваща геометрично място на точки, координатите на която показват комбинацията от напреженията σ_m и σ_a , при които материалът не се разрушава при неограничен брой цикли. (На практика напрежението σ_m се създава, като епруветката от фиг.15.7 се опъне с постоянна сила, което може да стане, като между двата вътрешни лагера се монтира свита корава пружина)

Диаграмата на якостна умора разделя равнината на две области – защрихованата, която ще бъде опасна зона и незащрихованата – безопасна. Ако напреженията в тялото, подложено на циклично натоварване - σ_m и σ_a (координатите на т.А - работна точка) са в безопасната зона, тогава отношението на отсечките OB/OA може да се нарече **коефициент на сигурност** на напрегнатото състояние при циклично натоварване:

$$n = \frac{OB}{OA} \tag{15.4}$$

Този подход (графичен) за определяне на коефициента на сигурност изисква познаването на диаграмата на якостна умора – фиг.15.9-а, за построяването на която са необходими десетки изпитания. За намаляване броя на изпитанията се работи с т.н. **опростена диаграма на якостна умора** – фиг.15.9-б, в която точките C и D се свързват с права линия. По-такъв начин отпада необходимостта от множеството изпитания (за т.C е нужно едно изпитване на опън, а за т.D – изпитание на якостна умора при симетричен цикъл на натоварване). От друга страна замествайки диаграмата на якостна умора с права линия, увеличаваме опасната зона и следователно с опростената диаграма изчисленията са на страната на сигурността.

С помощта на опростената диаграма се определя лесно и коефициента на сигурност 15.4. От подобието на триъгълниците OAL и OBD – фиг.15.9-б следва:

$$n = \frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OL} = \frac{OD}{OK + LK} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + LK} \tag{15.5}$$

От друга страна:

$$\frac{LK}{OD} = \frac{AK}{OC} \quad \rightarrow \quad LK = OD\frac{AK}{OC} = \sigma_{-1}\frac{\sigma_m}{\sigma_B} \tag{15.6}$$

Заместваме в 15.5 и окончателно получаваме:

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \sigma_{-1}\dfrac{\sigma_m}{\sigma_B}} \tag{15.7}$$

Тук σ_m и σ_a са параметрите на цикъла и се определят след изчисление на напреженията в опасната точка на изследваното тяло, а σ_B и σ_{-1} се определят от изпитанията на материала, от който е изработено тялото

Аналогично се определя коефициента на сигурност за детайли, подложени на циклично натоварване, при които възникват тангенциални напрежения.

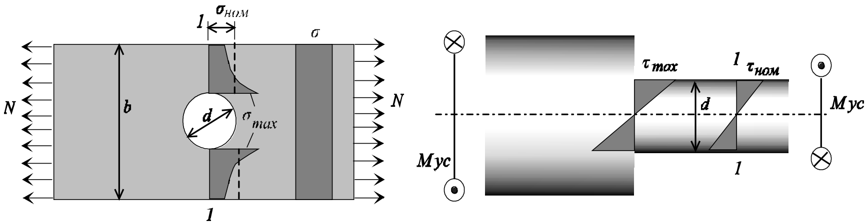
$$n = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a + \tau_{-1}\dfrac{\tau_m}{\tau_B}} \tag{15.8}$$

Формули 15.7 и 15.8 могат да се приложат само за стандартен тип епруветка (с определени размери, с които е правено изпитанието), шлифована. За реални детайли с произволни размери и повърхност се налагат корекции, които ще разгледаме по-долу.

15. Влияние на концентрацията на напреженията, състоянието на повърхнините и размерите на детайлите върху якостта на умора

А) Влияние на концентрацията на напреженията

В областта на резките промени на формата на телата, отвори, остри ъгли и изтънявания се наблюдава локално силно завишение на напреженията, което **наричаме концентрация на напреженията**, а самите причинители – **концентратори**. Така например в пластина с постоянна дебелина (δ) с отвор по средата – фиг.15.10-а, подложена на центричен опън, около отвора се наблюдава локално завишение на напреженията, което при малък отвор може да достигне три пъти номиналното напрежение, определено без да се държи сметка за концентратора. Този въпрос ще бъде разгледан по-подробно по-долу в раздел 15.4.



Фиг.15.10. Концентрация на напреженията

Подобно завишение на напреженията се забелязва и при усукване на степенчат вал – фиг. 15.10-б, където промяната на диаметъра става рязко, без закръгления. Могат да се посочат още десетки примери за подобно завишение на напреженията.

За отчитане на локалното завишение на напреженията се въвежда т.н**.** **теоретичен коефициент на концентрация на напреженията**, който се определя като отношение на максималното напрежение към номиналното напрежение:

$$\alpha_к = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{ном}} \quad , \quad \alpha_к = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{ном}} \qquad (15.9)$$

Тук максималното напрежение се определя чрез методите на Теорията на еластичността, като се държи сметка за концентратора, а номиналното напрежение – чрез средствата на Съпротивление на материалите, без да се държи сметка за концентратора. Така например за показаните два примера от фиг. 15.10 номиналното напрежение ще бъде:

$$\sigma_{ном} = \frac{N}{(bh - \pi\, d^2/4)\delta} \quad , \quad \tau_{ном} = \frac{16M_{ус}}{\pi\, d^3}$$

За пластината номиналното напрежение е определено по формулата за центричен опън $N/F_{нето}$, където $F_{нето}$- площ на напречно сечение на пластината по линията 1-1.

На практика определянето на коефициента $\alpha_к$ става чрез различни таблици и графики, които могат да се намерят в справочната литература за различни видове концентратори [8] при съответното натоварване.

Концентрацията на напреженията се оказва един от основните фактори при якостната умора на материалите. Това е така, защото началото на разрушението за всеки детайл при циклично натоварване започва именно от точката с най-големи напрежения.

Теоретичният коефициентът на концентрация на напреженията, определен съгласно 15.9 се отнася за статично натоварване на съответния детайл. Оказва се, че при циклично натоварване концентрацията на напреженията влияе различно върху якостта на умора в зависимост от характера на натоварването (коефициента на асиметрия) и вида на материала. Затова се въвежда т.н**. ефективен коефициент на концентрация на напреженията - **α_r, който се определя според вида на натоварването. Така например при постоянен товар ($r=1$) имаме:

$$\alpha_{+1} = \frac{\sigma_B}{\sigma_B'} \qquad (15.10)$$

където σ_B – граница на разрушение на пробен образец без концентратор, σ_B'- граница на разрушение на пробен образец с концентратор на напреженията.

За жилавите материали локалното завишение на напреженията няма особено значение, защото максималните напрежения не могат да се повишат повече от границата на провлачване (σ_s) на материала.В областта на високи напрежения се получават локални пластични деформации без да се образуват пукнатини. Като цяло тялото продължава да изпълнява предназначението се, защото в останалите точки напреженията са под границата на еластичност. Поради тази причина за жилавите материали при статично натоварване се приема $\alpha_{+1}=1$.

Не така стои този въпрос при крехките материали. При тях достигането на границата на разрушение σ_B в мястото на концентратора довежда до образуване на пукнатина, която може да се разпространи много бързо. Затова при крехки материали се приема, че ефективния коефициент на концентрация на напреженията е равен на теоретичния коефициент, т.е. $\alpha_{+1}=\alpha_к$. Изключение от това правило прави чугунът, за който се приема, че $\alpha_{+1}=1$. Причината затова се корени в структурните особености на чугуна, за който знаем, че съдържа графит. Всяко ядро графит се явява вътрешен локален концентратор в много по-висока степен, отколкото формата на тялото. Ето защо детайлите, изработени от чугун, се влияят много малко от наличието на концентратори

При симетричен цикъл на натоварване ефективният коефициент на концентрация на напреженията се определя по израза:

$$\alpha_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma'_{-1}} \tag{15.11}$$

където σ_{-1} -граница на якостна умора на пробен образец без концентратор, σ_{-1}'- граница на якостна умора на пробен образец с концентратор на напреженията. За определяне на коефициента α_{-1} се използуват графики и таблици, получени експериментално. Когато липсват експериментални данни за α_{-1}, може да се използува следната емпирична зависимост:

$$\alpha_{-1} = 1 + \eta_k(\alpha_k - 1) \tag{15.12}$$

където $\eta_к$ - **коефициент на чувствителност на материала към концентрация на напреженията**. Той се приема така: За високо якостни стомани $\eta_к = 1$; За конструктивни стомани $\eta_к = 0{,}6\text{-}0{,}8$ (по-високата стойност се отнася за стоманите с по-голяма якост); За чугун $\eta_к = 0$.

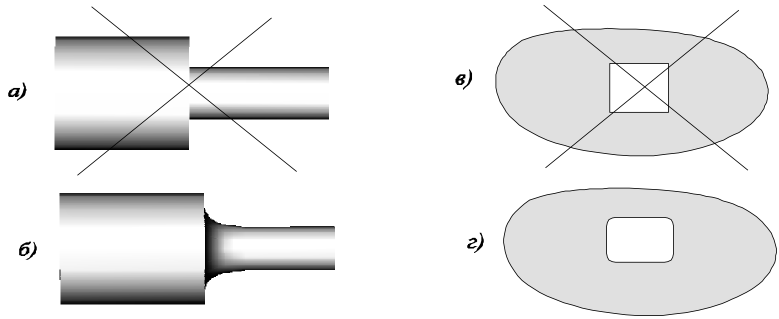
Как се отразява наличието на концентратор в определен детайл на коефициента на сигурност при циклично натоварване, определен по формули 15.7 или 15.8 ? Това става, като координатите на работната точка на цикъла σ_a и σ_m се коригират по следния начин:

$$\sigma_a \rightarrow \sigma_a\alpha_{-1} \quad , \quad \sigma_m \rightarrow \sigma_m\alpha_{+1} \tag{15.13}$$

По този начин координатите на работната точка се доближават до опасната зона на диаграмата на якостна умора – фиг.15.9 и коефициентът на сигурност намалява.

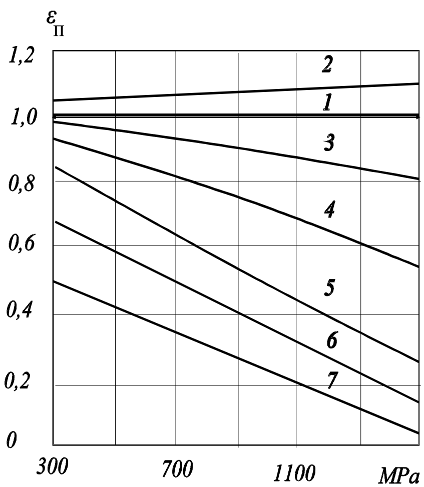
За да увеличим коефициента на сигурност, могат да се приемат конструктивни мерки, които да доведат до намаляване коефициентите на концентрация на напреженията. Това става чрез избягване на резките преходи, на острите ръбове и ъгли – фиг. 18.11.

Многобройни са примерите от практиката, когато отговорни и скъпи конструкции са се разрушили скоро след пускането им в експлоатация по причина на висока концентрация на напреженията в определени места от нея. Типичен пример за това са разрушенията на два пътнически самолета ‘Comet’ на английските въздушни линии в началото на 50-те години на миналия век, които са първите пътнически самолети с реактивни двигатели в света [35]. След изваждането на отломките от дъното на океана, реконструкцията на самолетите и много скъпите допълнителни експериментални изследвания се установява, че причината за разрушението е извънредно високата концентрация на напреженията в ъглите на прозорците на самолета, които са били проектирани и изработени както на фиг.15-11-в. В тези места много бързо след пускане в експлоатация на самолетите се получават пукнатини, провокирани в конкретния случай от концентрацията на напреженията около отворите на нитовите шевове близко до прозорците. Затова днешните самолети се изработват с кръгли и малки прозорци, при които концентрацията на напреженията е много по-ниска.



Фиг.15.11. Конструктивни мерки за намаляване на напреженията в местата с концентратори

Б) Влияние качеството на повърхнината върху якостната умора



Фиг.15.12

Началото на пукнатина започва обикновено от повърхността на тялото, където в повечето случаи напреженията са максимални. Следователно качеството на повърхността играе съществена роля за зараждането на пукнатината.

Въвежда се **коефициент за качеството на повърхнината**, който се определя по израза:

$$\varepsilon_П = \frac{\sigma'_{-1,П}}{\sigma_{-1}} \qquad (15.14)$$

където - $\sigma_{-1}{}'_{,П}$ – граница на якостна умора на материала на образец с повърхнина, която изследваме; σ_{-1} – граница на якостна умора на материала на стандартен образец със стандартна повърхнина, която се приема, че е шлифована.

Определянето на коефициента $\varepsilon_П$ става чрез графики според границата на разрушение на материала и качеството на повърхнината – фиг. 15.12, където номера на съответната линия означава: 1 - шлифована епруветка (стандартна); 2 - тяло с полирана повърхност; 3 - повърхност, обработена с резец; 4 - повърхност със ситни нарези; 5 - необработена повърхност; 6 – корозирала повърхност в прясна вода; 7 – корозирала повърхност в морска вода.

Влиянието на качеството на повърхнината върху коефициента на сигурност се отчита, като амплитудната стойност на напрежението се раздели с коефициента $\varepsilon_П$.

$$\sigma_a \quad \rightarrow \quad \sigma_a / \varepsilon_П \tag{15.15}$$

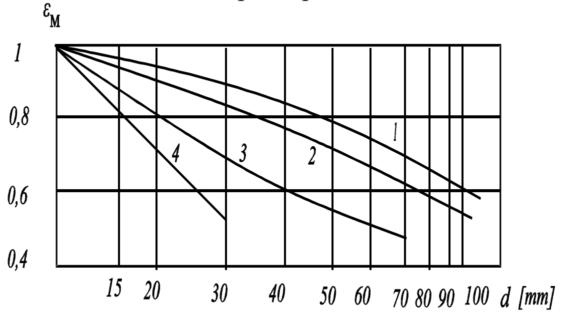
Тъй като коефициента $\varepsilon_П$ е по-малък от единица за грапавите повърхности, следва, че амплитудната стойност на напрежението се увеличава, с което коефициента на сигурност, определен съгласно 15.7 и 15.8 намалява.

От казаното може да се направи извода, че отговорни, силно натоварени детайли следва да се шлифоват. Съществено подобрение се получава и чрез специална обработка на повърхността чрез ситноструйна обработка с чугунени или стоманени дробинки, при което в повърхностния слой на тялото се получават остатъчни натискови напрежения, които възпрепятстват появата на пукнатини. Добри резултати се получават и при повърхностно азотиране на детайлите.

В) Влияние на размерите на детайлите върху якостната умора

Установено е, че детайли с по-големи размери са по склонни към разрушение при циклично натоварване. Причината за това е, че вероятността за съществуване на дефекти в материала, когато детайлът е с по-големи размери, се увеличава.

За отчитане размерите на детайлите върху якостта на умора се въвежда т.н. **мащабен фактор**, коефициент, който се определя по израза:



Фиг.15.13

$$\varepsilon_М = \frac{\sigma'_{-1,Д}}{\sigma_{-1}} \tag{15.16}$$

където - $\sigma'_{-1,Д}$ – граница на якостна умора на материала на детайла;

σ_{-1} – граница на якостна умора на материала на стандартен образец със стандартен размер, който за цилиндрични образци се приема, че е d=8-10 mm.

Коефициентът за мащабния фактор ε_M се избира от графика във функция от размерите на детайла и вида на материала – фиг.15.13, където крива 1 се отнася за въглеродна стомана, 2 - за легирана стомана без концентратори на напрежението, 3 - за легирана стомана с концентратори на напрежението, 4 - за стомани с висока степен на концентрация на напрежението.

Влиянието на мащабния фактор върху коефициента на сигурност при якостна умора на материала отчитаме подобно влиянието на повърхнината, като корегираме амплитудната стойност на напрежението :

$$\sigma_a \quad \rightarrow \quad \sigma_a / \varepsilon_M \tag{15.17}$$

Тъй като мащабният коефициент е по-малък от единица, следва, че при по-големи размери на детайла амплитудната стойност на напрежението формално расте с което коефициента на сигурност, определен съгласно изрази 15.7 и 15.8, намалява.

15.3. Коефициент на сигурност при якостна умора

С отчитане влиянието на концентрацията на напреженията (15.3), качеството на повърхнината (15.15) и размерите на детайла (15.17), получените изрази за коефициента на сигурност 15.7 (при действие само на нормални напрежения) и 15.8 (при действие само на тангенциални напрежения) добиват вида:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{\alpha_{-1}}{\varepsilon_П \varepsilon_M}\sigma_a + \alpha_{+1}\sigma_m \dfrac{\sigma_{-1}}{\sigma_B}} \qquad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\dfrac{\alpha_{-1}}{\varepsilon_П \varepsilon_M}\tau_a + \alpha_{+1}\tau_m \dfrac{\tau_{-1}}{\tau_B}} \tag{15.18}$$

Тук коефициентите $\varepsilon_П$ и ε_M са едни и същи при нормални и тангенциални напрежения, но коефициентите α_{-1} и α_{+1} следва да се определят според вида на натоварването и вида на концентратора.

Ако в дадена точка от тялото действуват едновременно нормални и тангенциални напрежения, определянето на сумарния коефициент на сигурност са определя по емпиричната зависимост:

$$n = \frac{n_\sigma \ n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \tag{15.19}$$

Формула 15.19 е известна в литературата като формула на Хаф и Полард. Сумарният коефициент на сигурност, определен по тази формула е винаги по-малък от по-малкия коефициент n_σ или n_τ.

Пример 15.1. Да се определи коефициента на сигурност на втория вал на редуктора за примера от задача 8.3, ако границата на якостна умора на материала е σ_{-1}*=300 Мра*, границата на провлачване при усукване е τ_s*=250 Мра*. Ефективният коефициент на концентрация на напреженията в мястото на зъбното колело е α_{-1}*=1,3*. Валът е шлифован.

В примера 8.3 валът беше оразмерен на сложна съпротива от статичното действие на огъващия и усукващия момент, съответно равни в опасното сечение на вала (в мястото на зъбното колело): *Мог=8,84 KNm. Мус=26,36 kNm.* За диаметъра на вала беше получено значението *d=0,104 m.*

Тъй като валът се върти, а равнината на огъващия момент остава постоянна, то валът се оказва натоварен циклично по симетричен цикъл. В допълнение валът се товари и на усукване. Следователно коефициентът на сигурност ще определим по формулата на Хаф и Полард 15.19, за която е необходимо да определим поотделно коефициентите на сигурност от нормалните и тангенциални напрежения – формули 15.15.

Тъй като валът е шлифован, то $\varepsilon_П$*=1*. Диаметърът на вала е близък до стандартния (фиг.15.13), следователно ε_M*=1.* Амплитудната стойност на нормалното напрежение е:

$$\sigma_a = \frac{M_{ог}}{W_y} = \frac{32M_{ог}}{\pi\ d^3} = \frac{32.8{,}84.10^3}{\pi\ 0{,}104^3} = 80{,}05\,MPa$$

От тук коефициентът на сигурност по нормални напрежения ще бъде:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{\alpha_{-1}}{\varepsilon_П \varepsilon_M}\sigma_a} = \frac{300}{\dfrac{1{,}3}{1.1}80{,}05} = 2{,}88$$

Максималното тангенциално напрежение е:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{ус}}{W_n} = \frac{16M_{ус}}{\pi\ d^3} = \frac{16.26{,}36.10^3}{\pi\ 0{,}122^3} = 73{,}93\,MPa$$

Коефициентът на сигурност по тангенциални напрежения (постоянни във времето) ще бъде:

$$n_\tau = \frac{\tau_s}{\tau_{\max}} = \frac{250}{73{,}93} = 3{,}38$$

Сумарният коефициент на сигурност по Хаф и Полард ще бъде:

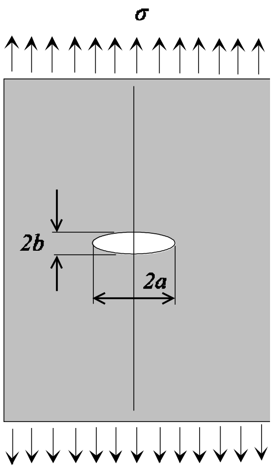
$$n = \frac{n_\sigma\ n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{2{,}88.3{,}38}{\sqrt{2{,}88^2 + 3{,}38^2}} = 2{,}19$$

15.4. Основи на теорията на разрушението

Теорията на разрушението води началото си от работите на **А. Грифит** (1893-1963) - основоположник на теорията за разпространението на пукнатините в крехките материали. През 1920 г. Грифит публикува резултатите от експерименталните изследвания за якостта на тънки стъклени нишки с дебелина 2-3 микрона, чрез които той дава отговор на въпроса защо реалната якост на материалите е много по-малка (десетки и стотици пъти) от теоретичната якост, получена чрез изчисление на силите на сцепление между атомите. Причината за това той намира в наличието на микропукнатини в материалите – [6]. Наистина, ако за стъклени нишки с дебелина над 0.1 mm якостта на опън е около 70-140 MPa, за нишки с дебелина 2-3 микрона якостта им се увеличава до 11300 MPa (80 пъти), която е близко до теоретичната якост от 14000 MPa. При тънките влакна възможността за поява на пукнатини е минимална, от където Грифит прави извода, че главната причина за намаляване якостта на крехките материали е наличието на пукнатини в тях. Причината за появата на пукнатините не се коментира. Грифит създава и теорията за разпространение на пукнатините в крехки материали, която ще разгледаме.

А) Теория на Грифит

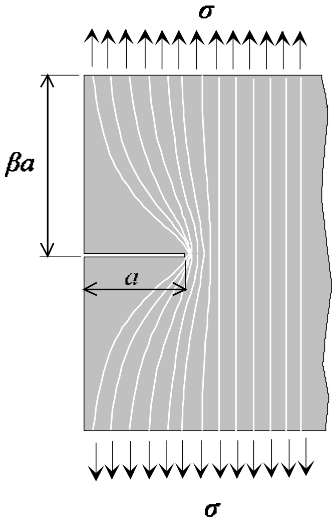
Малко преди изследванията на Грифит се появява работа на **Инглиз** (1913), в която той изследва напреженията около отвори и стига до извода, че в местата на отслабване на телата с отвори локалните напрежения могат д се увеличат десетки пъти спрямо номиналните. Във връзка с това той въвежда понятието коефициент на концентрация на напреженията, коментиран по-горе в 15.2. Така например в опънатата пластина, в която е изработен малък елиптичен отвор (спрямо размерите на пластината) с полуоси a и b – фиг. 15.14, коефициентът на концентрация на напреженията във върховете на елипсата в направление на действуващото напрежение се определят по израза:



Фиг.15.14

$$\alpha_k = 1 + 2\frac{a}{b} \qquad (15.20)$$

От тук за кръгъл отвор, за който $a=b$, получаваме $\alpha_k=3$. Но ако устремим малката полуос към нула $(b \to 0)$, при което елипсата ще се изроди в нещо като пукнатина, тогава коефициентът на концентрация на напреженията, определен съгласно 15.20, се получава равен на безкрайност. Това обаче означава, че при каквото и да е напрежение σ на опън на пластината, същата моментално следва да се разруши, което на практика не се получава. За да отговори на въпроса защо това не се случва, Грифит приема енергетичен подход към проблема.



Фиг.15.15

Ако разгледаме половината от пластината от фиг.15.4, в която е налице пукнатина с размер *2a*, то анализът на напреженията в пластината показва, че траекторията на първото главно напрежение изглежда така, както е показано на фиг.15.15. Решението на тази задача не може обаче да се извърши чрез методите на Съпротивление на материалите. По нататък, в пример 17.1 тя е решена числено по метода на крайните елементи.

От фиг.15.5 виждаме, че от двете страни на пукнатината се появяват области, освободени от напрежения, следователно при поява на пукнатина част от потенциалната енергия на пластината се освобождава. На основание на 4.64, енергията за единица обем ще бъде:

$$U_0 = \frac{\sigma^2}{2E}$$

Ако приемем, че пластината е с единична дебелина, тогава пълната освободена енергия ще получим, като умножим U_o на ненапрегнатата площ от двете страни на пукнатината. От фиг. 18.5 се вижда, че тази площ представлява приблизително два правоъгълни триъгълника с катети a и βa, при което според Грифит $\beta=\pi$. Така за освободената енергия получаваме:

$$U_\sigma = U_0.2\frac{a\beta\ a}{2} = \frac{\pi\ a^2\sigma^2}{2E} \qquad (15.21)$$

От друга страна при появата на пукнатината се получават две нови повърхности с площ *2a.1*. Всяка повърхност се характеризира с повърхностна енергия, която може да бъде изчислена, като се умножи площта и с една константа γ (J/m^2 – повърхностна енергия на единица площ), зависеща от вида на материала. Така необходимата енергия за създаване на тези повърхности ще бъде:

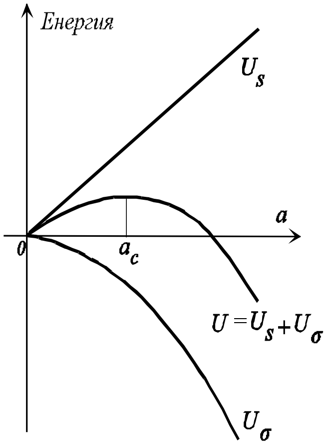
$$U_s = 2a\gamma \qquad (15.22)$$

В контекста на теорията на разрушението вместо константата γ се използува константата G=2γ. Тогава повърхностната енергия ще бъде:

$$U_s = Ga \tag{15.23}$$

Сумата от двете енергии - повърхностната енергия на пукнатината U_s и енергията U_σ, освободена от разтоварването на пластината, ще бъде:

$$U = U_s - U_\sigma = Ga - \frac{\pi a^2 \sigma^2}{2E} \tag{15.24}$$



Фиг.15.16

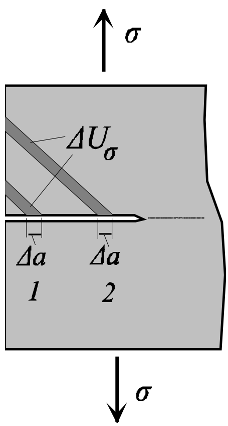
Тук енергията, която се добавя е с положителен знак (U_s), а която се освобождава – с отрицателен знак (U_σ). Графиките на двете енергии и сумарната енергия имат вида, показан на фиг.15.16. Максимума на сумарната енергия ще получим от израза:

$$\frac{dU}{da} = \frac{d}{da}\left(Ga - \frac{\pi a^2 \sigma^2}{2E} \right) = G - \frac{\pi a \sigma^2}{E} = 0 \tag{15.25}$$

От тук получаваме:

$$G_c E = \pi a \sigma^2 \tag{15.26}$$

При изпълнение на условието 15.26 притокът на осободената енергия ще бъде по-голям от енергията, която пукнатината поема. Това условие според Грифитс е критично състояние, след което пукнатината се разпространява мигновено в пластината с много висока скорост, достигаща 50-60 % от скоростта на разпространение на звука в материала на пластината.. Дължината на пукнатината (a_c) в това състояние се нарича **критична дължина на пукнатината**. Причината за това се дължи на факта, че енергията, която се освобождава, зависи от квадрата на дължината на пукнатината – 15.21, а необходимата енергия за създаване на пукнатината е доста по-малка – тя зависи линейно от дължината на пукнатината – 15.22. На фиг. 15.17 може да се види, че при голяма дължина на пукнатината освободената енергия от пластината (защрихованата част – положение 2) при едно елементарно придвижване на пукнатината с Δ_a е много по-голяма, отколкото освободената енергия при същото движение на пукнатината, когато тя е по-къса (положение 1). В уравнение 15.26 G_c е материална



Фиг. 15.17

константа [J/m^2], представляваща критичната повърхностна енергия. Така например за стъкло $G_c=0.01\ kJ/m^2$ -[34].

С помощта на уравнение 15.26 могат да се решат две задачи – при дадено напрежение да се намери критичното значение на пукнатината:

$$a_c = \frac{G_c E}{\pi \sigma^2} \tag{15.27}$$

От 15.27 се вижда, че критичната дължина на пукнатината зависи силно от приложеното напрежение. При голямо напрежение критичната дължина намалява значително.

Втората задача е при известна дължина на пукнатината да се определи големината на напрежението, при което тя ще продължи да се разпространява. Решаваме 15.26 спрямо напрежението и получаваме:

$$\sigma = \sqrt{\frac{G_c E}{\pi a}} \tag{15.28}$$

Пример 15.2. Да се определи критичната дължина на пукнатината в пластинка от стъкло, за което: *E=69 GPa, Gc=0,01 kJ/m2*, при условие, че напрежението е близко до теоретичната якост от *3600 MPa.*

Заместваме посочените данни в 15.27:

$$a_c = \frac{G_c E}{\pi \sigma^2} = \frac{0{,}01.10^3.69.10^9}{\pi .(3600.10^6)^2} = 17.10^{-9}\ m$$

Получихме, че пукнатина от 17 ангстрьома е достатъчна за разрушението на пластинката.

Пример 15.3. В тънък стоманен лист с централна пукнатина с дължина *40 mm* настъпва разрушение при напрежение *480 Mpa*. Какво ще е напрежението на разрушаване, ако дължината на пукнатината е *100 mm* ?

Критичното състояние за двата случая се дава с уравнение15.26. Имаме:

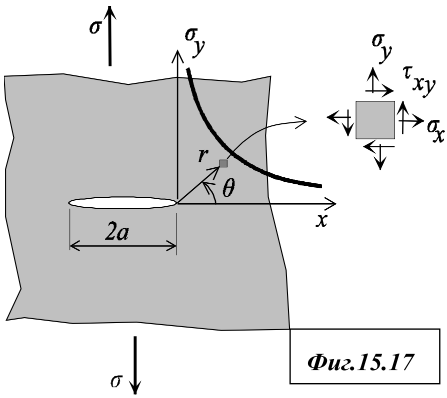
$$G_c E = \pi a_1 \sigma_1^2 = \pi a_2 \sigma_2^2$$

От тук определяме:

$$\sigma_2 = \sigma_1 \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = 480\sqrt{\frac{40}{100}} = 304\,MPa$$

Б) Пукнатини в пластични материали.

Теорията на Грифит предполага, че материалът е линейно еластичен при опън до разрушението си, каквито са крехките материали. При пластичните материали въпросът с разпространението на пукнатините стои по-сложно. Теорията за разпространението на пукнатините за пластични материали е разработена от **Ирвин** (1948).



Фиг.15.17

Ако разгледаме областта около пукнатината на пластина с неограничени размери – фиг. 15.17, в условията на равнинно напрегнато състояние за разпределението на напреженията около върха на пукнатината Ирвин е получил изразите (15.29), където: r – разстояние от върха на пукнатината до разглежданата точка; θ - ъгъл между радиус вектора r и ос x на пукнатината;

$$\sigma_x = \frac{K_I}{(2\pi\, r)^{1/2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \tag{15.29}$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi\, r)^{1/2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$$

$$\tau_{xy} = \sigma_x = \frac{K_I}{(2\pi\, r)^{1/2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

Тук K_I се нарича **коефициент на интензивност на напреженията**, който се определя по израза:

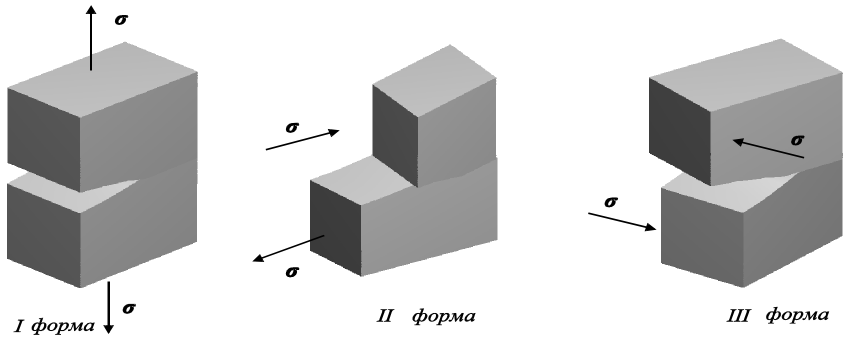
$$K_I = Y\sigma\,(\pi\, a)^{1/2} \tag{15.30}$$

Тук Y – безразмерен коефициент, зависещ от геометрията на пластината и пукнатината. Индексът I означава, че разглеждаме пукнатина, която се **разтваря** (I форма). Освен тази форма, възможни са още две форми на разпространение на пукнатината – II – **плъзгаща се пукнатина** и III – **разкъсваща пукнатина** – фиг.15.18. Разпределението на напреженията при другите две форми се дава с подобни изрази. Най-често срещана обаче е първата форма.

Коефициентът на интензивност на напреженията, определен съгласно 15.30 има размерност [$Pa.m^{1/2}$] и няма определен физически смисъл. Вижда се , че той зависи от приложеното напрежение, дължината на пукнатината и формата на пластината. Неговото теоретично определяне не може да стане чрез методите на Съпротивление на материалите. Съществуват формули и графики, чрез които той може да се определи за някои по-често срещани случаи. Така например за пластината от фиг.15.14 имаме:

$$K_I = \sigma\ (\pi\ a)^{1/2} \left(\frac{B}{\pi\ a} \tan \frac{\pi\ a}{B} \right)^{1/2} \tag{15.31}$$

където B – широчина на пластината.



Фиг.15.18. Форми на разрушение

От изрази 15.29 се вижда, че във върха на пукнатината всички напрежения клонят към безкрайност. Според Ирвин, критична дължина на пукнатината при известно напрежение и дадена конфигурация на пластината и пукнатината настъпва тогава, когато коефициентът на интензивност на напреженията добие някаква **критична стойност** - $K_{I,C}$, зависеща само от вида на материала:

$$Y\sigma\ (\pi\ a)^{1/2} = K_{I,C} \tag{15.32}$$

Критичната стойност на коефициента на интензивност на напреженията, която се нарича още **жилавост на материала при разрушение**, се измерва чрез специални тестове с помощта на епруветки с отслабване и надрези, подложени на циклично натоварване, докато се появи пукнатина с дължина *1,25 mm*, след което се изпитват статично. Жилавостта на различните материали при разрушение е дадена в Приложение 2.

Уравнение 15.32 за жилави материали играе същата роля, както уравнение 15.26 за крехки материали. Чрез него могат да се решат двете задачи – определяне на критичната дължина на пукнатината при известно напрежение или определяне на напрежението, при което дадена пукнатина ще продължи да се разпространява.

От сравнението на уравнения 15.32 и 15.26 може още да се заключи, че между материалните константи E, G_C и $K_{1,C}$ за пластина с неограничени размери ($Y=1$)съществува следната релация:

$$K_{1,C} = (EG_C)^{1/2} \tag{15.33}$$

Пример 15.4. Цилиндричен съд е под налягане. Да се определи критичната дължина на пукнатина, образувала се по меридиана на съда в два случая: а) Съдът е изработен от обикновена стомана с граница на провлачване $\sigma_s = 300\ MPa$ и жилавост на разрушаване $150\ MPa.m^{1/2}$ б) Съдът е изработен от хромникелова стомана с граница на провлачване $\sigma_s = 1000\ MPa$ и жилавост на разрушаване $80\ MPa.m^{1/2}$.

От гл.13 знаем, че при цилидрична черупка по-опасното напрежение е кръговото напрежение, което в случая ще разтваря пукнатината. Приравняваме това напрежение на границата на провлачване за материала на съда. От уравнение 15.32, разглеждайки повърхността на съда като разпъната пластина (от действието на напрежението σ_t) с безкрайни размери спрямо размерите на пукнатината, за критичната полудължина на пукнатината получаваме:

$$a_c = \frac{K_{1,C}^2}{\pi\ \sigma_s^2}$$

Заместваме тук данните за двата случая:

$$a)\quad a_c = \frac{150^2}{\pi\ .300^2} = 0{,}0796\,m \qquad б)\quad a_c = \frac{80^2}{\pi\ .1000^2} = 0{,}0020\,m$$

т.е., обикновената стомана допуска значително по-големи пукнатини, преди да се разруши.

Гл. 16. ДИНАМИЧНО ДЕЙСТВИЕ НА ТОВАРИТЕ

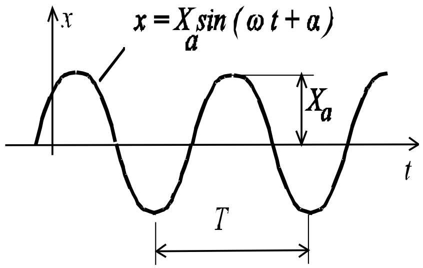
В предидущите глави считахме, че товарите са приложени статично, т.е. всеки товар е нараснал бавно от нула до максималната си стойност, след което остава постоянен. В практиката обаче има случаи, когато товарите се изменят във времето по определен закон. Оказва се, че поведението на конструкциите в тези случаи е твърде различно от поведението им при статично натоварване. Променлива сила с много малка максимална стойност при определени условия може да предизвика много по-големи премествания (напрежения, реакции), отколкото много по-голяма сила, статично приложена. В практиката са известни много случаи на разрушение на отговорни конструкции при динамично действие на товарите. Всичко това налага разглеждане на поведението на конструкциите при тези случаи на натоварване.

16.1. Свободни трептения на система с една степен на свобода

А) Определения

Нека една точка се движи по закона:

$$x = X_a \sin(\omega t + \alpha) \tag{16.1}$$



Фиг. 16.1

Графиката на това движение е показана на фиг. 16.1. Тук *Xa* се нарича **амплитуда на трептене**, *ω* **- кръгова честота на трептене** (*rad/s*), *α* **- начална фаза** *(rad)*. Времето, измерено между два последователни максимума на *x* наричаме **период на трептене –** *T (s)*. Когато движението се осъществява по закона на синуса или косинуса, движението се нарича **хармонично.**

Освен кръгова честота, използува се и друго измерване на честотата, като: **брой трептения за секунда** – (*f*) , която се измерва в херци (*Hz*) или **брой трептения за минута** *N (min⁻¹)***.** Между периода и различните честоти съществуват следните съотношения:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}[rad/s] \qquad f = \frac{1}{T}[1/s] \qquad \omega = 2\pi f \qquad \omega = \frac{\pi N}{30} \qquad N = 60f\,[1/\min] \tag{16.2}$$

Опитът показва, че ако отклоним една еластична система от положението и на равновесие, след което я освободим, всяка нейна точка извършва трептения по закона 16.1. Обяснението е просто. Еластичните сили от натрупаната в процеса на деформация енергия връщат системата в недеформираното и състояние, но при това движение отделните частици от нея придобиват кинетична енергия, която в равновесно състояние не може да изчезне, а се отдава обратно на системата, която продължава да се движи по инерция в противоположно направление, докато отдадената кинетичната енергия се натрупа в потенциална и процесът се повтаря. Когато тези трептения се извършват самостоятелно от системата, без външна намеса, те се наричат **свободни трептения**.

Понякога върху конструкциите действуват сили, които сами се променят по закона 16.1, при което те принуждават и конструкцията да се движи по този закон. Тогава трептенията се наричат **принудени.**

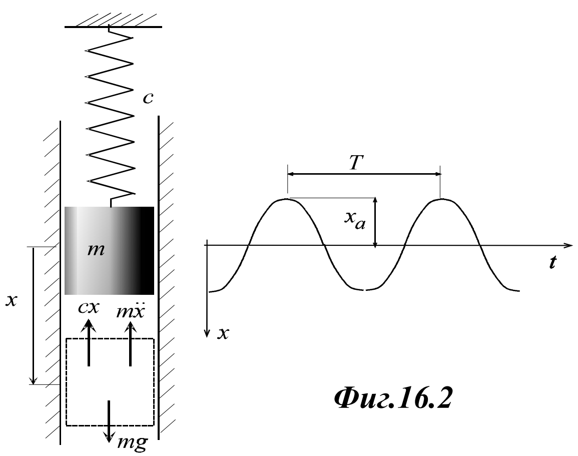
Когато при изучаването на трептенията се отчитат силите на съпротивление, които възпрепятстват трептенията, тогава трептенията се наричат **демпфирани**, а когато тези сили не се отчитат, трептенията се наричат **недемпфирани**. Практически всички трептения са демпфирани, но при малки демфиращи сили последните могат да се пренебрегнат.

Когато анализираме поведението на една конструкция при действие на променливи сили, както и при статичните изследвания, сме длъжни да изберем модел или изчислителна схема. Една от най-важните характеристики на модела е степените на свобода. **Степента на свобода** е цяло положително число, показващо броя на независимите координати на конструкцията, описващи деформираното и състояние. Може да имаме конструкция с 1,2,... и неограничен брой (теоретически) степени на свобода.

Например закачена на пружина маса, която може да се движи само вертикално – фиг.16.2, представлява система с една степен на свобода, защото вертикалното отклонение на масата определя еднозначно деформираното състояние на системата. Ако обаче масата е доста по-малка от масата на пружината, тогава ще ни трябват много повече вертикални координати на точките от пружината, които описват нейното деформирано състояние.

Б) Свободни недемпфирани трептения на система с една степен на свобода

Разглеждаме маса с големина m, окачена на пружина с коравина c, при което масата може да извършва само вертикално движение – фиг.16.2. Както подчертахме по-горе, ако масата (m) е много по-голяма от масата на пружината, имаме система с една степен на свобода. Отклоняваме масата на някакво малко разстояние x и я пускаме.



Фиг.16.2

За да получим уравнението на движение, прилагаме принципа на **Даламбер,** съгласно който уравненията на равновесие на движеща се система се записват както за недвижеща се, ако силите на инерция се вземат със знак, противоположен на ускорението. Силите, действуващи върху масата, са: теглото на масата (mg), силата от еластичната деформация на пружината (cx), насочена против преместването на масата и силата на инерция $(m\ddot{x})$, насочена също против положителната посока на движението.

Уравнението на равновесие за масата ще бъде:

$$mg - m\ddot{x} - cx = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + cx = mg \tag{16.3}$$

Това уравнение може да се приведе към вида:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g \quad \text{където} \quad \omega^2 = c/m \tag{16.4}$$

Уравнение 16.4 е добре изучено в Теоретичната механика. То се нарича уравнение на **линейния осцилатор** и има решение:

$$x = X_a \sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2} \tag{16.5}$$

където X_a, α са съответно амплитуда и фаза на трептенето, които се определят от началните условия на движението. Второто събираемо може да се преобразува така:

$$\frac{g}{\omega^2} = \frac{gm}{c} = mg\delta_{1,1} = x_{ст} \tag{16.6}$$

Тук $\delta_{1,1}=1/c$ – деформация на пружината от сила с големина единица (виж 9.26). Следователно движението на масата се извършва от положението на статично равновесие на масата.

Решението 16.5 показва, че масата извършва синусоидални трептения с честота ω, която наричаме **честота на свободните трептения** и съгласно 16.4 и 16.6 ще бъде:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{\delta_{1,1} m}} = \sqrt{\frac{g}{x_{ст}}} \tag{16.7}$$

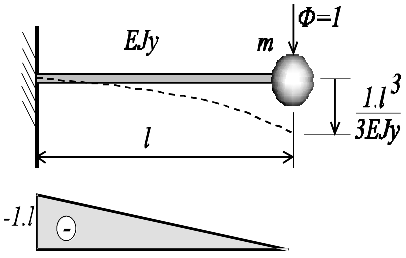
От 16.7 виждаме, че за да определим честотата на свободните трептения, трябва да определим коефициента $\delta_{1,1}$, представляващ преместването на масата от сила с големина единица. Тази задача е задача на Съпротивление на материалите, разгледана подробно в гл.9 и гл.10.

От този израз виждаме също, че за да съществуват трептения, са необходими две задължителни условия – да имаме еластичност и маса. Доколкото няма тела без тези свойства, то трептенията са присъщи на всички тела. Тъй като масата и еластичността на телата не могат да изчезнат, то трептенията са присъщи и на космическите апарати, въпреки, че са в условия на безтегловност.

Освен това от 16.7 виждаме, че честотата на свободните трептения зависи само от собствените параметри на системата – маса и коравина (а значи и от закрепването на системата), а не зависи от никакви външни фактори, нито от началните условия. Поради тази причина честотата на свободните трептения се нарича още честота на **собствените трептения**.

В разгледания случай масата извършва линейни трептения. Ако масата извършваше ъглови трептения (като на фиг.16.8), принципна разлика в направените изводи няма. В този случай във формули 16.7 вместо масата m ще заместим масовия инерционен момент I около оста на ротация на масата, а коефициента $\delta_{I,1}$ ще има смисъл на ъгъла на завъртване на масата от единичен фиктивен момент, действуващ върху нея.

В) Пример 16.1. Да се определи честота на свободните вертикални трептения на системата, показана на фиг.16.3.



Фиг. 16.3

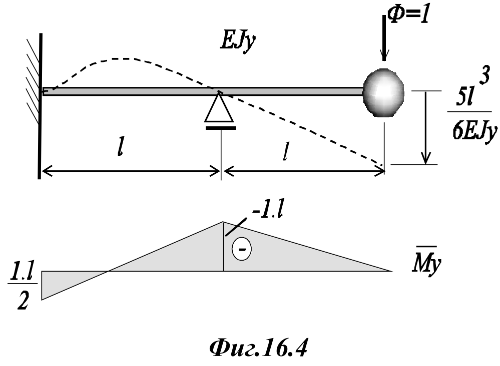
Преместването на масата от фиктивна сила с големина единица се определя на основание метода на Максвел-Мор. Построяваме диаграмата на огъващия момент от тази сила и я преумножаваме сама на себе си. Получаваме:

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EJ_y}\overline{M}_y\overline{M}_y = \frac{1}{EJ_y}\frac{1}{2}l.l.\frac{2}{3}l = \frac{l^3}{3EJ_y}$$

От тук получаваме:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{1,1}m}} = \sqrt{\frac{3EJ_y}{ml^3}}$$

Г) Пример 16.2. Да се определи честота на свободните вертикални трептения на системата, показана на фиг.16.4



Фиг.16.4

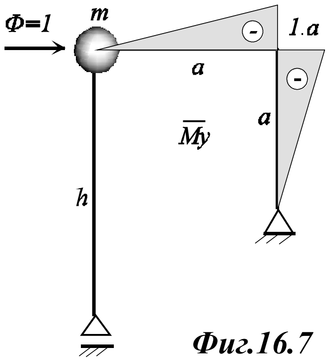
Тази задача се различава от предидущата по това, че е статически неопределена. Построяването на диаграмата на огъващия момент от единичната фиктивна сила, показана на фигурата, може да стане след разкриване на статическата неопределеност на гредата по известните методи, разгледани в гл.10 – силов метод или тримоментовото уравнение. Преумножаваме тази диаграма сама на себе си. Получаваме:

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EJ_y}\overline{M}_y\overline{M}_y = \ldots = \frac{7}{12}\frac{l^3}{EJ_y}$$

Тогава собствената честота ще бъде:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{1,1}m}} = \sqrt{\frac{12EJ_y}{7ml^3}}$$

Д) Пример 16.3. Да се определи честотата на свободните хоризонтални трептения на рамката, показана на фиг.16.7.



Фиг.16.7

Масата има в равнината две степени на свобода, но вертикалното и движение е силно възпрепятствувано от вертикалния прът. Хоризонталното преместване от единичната

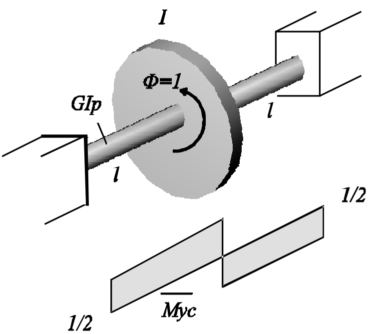
$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EJ_y}\overline{M}_y\overline{M}_y = \frac{1}{EJ_y}2\frac{1}{2}a^2\frac{2}{3}a = \frac{2a^3}{3EJ_y}$$

фиктивна сила ще бъде:

От тук:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{1,1}m}} = \sqrt{\frac{3EJ_y}{2ml^3}}$$

Е) Пример 16.4. Да се определи честотата на свободните усукващи трептения на диска с масов инерционен момент около оста на вала – *I* *[kg.m²]*, закрепен съгласно фиг.16.8.



Фиг.16.8

Формулата за определяне на собствената честота сега ще има вида:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{1,1}I}}$$

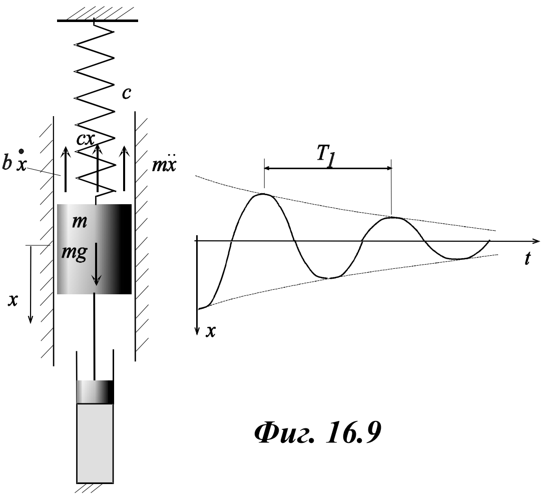
Където $\delta_{1,1}$ – ъгъл на завъртване на масата от единичен фиктивен момент. Този коефициент определяме по метода на Максвел-Мор:

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{GJ_p}\overline{M}_{yc}\overline{M}_{yc} = \frac{1}{GJ_p}2l.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{l}{2GJ_p}$$

От тук:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{1,1} I}} = \sqrt{\frac{2GJ_p}{l.I}}$$

Ж) Свободни демпфирани трептения на система с една степен на свобода



Фиг. 16.9

В този случай върху масата ще действува още една сила **– силата на съпротивлението** – фиг. 16.9. Тази сила, която се нарича още **дисипативна сила**, може да бъде създадена външно – с помощта на специално конструирани за целта устройства, като хидравлични, пневматични и фрикционни амортисьори. От друга страна такива сили на съпротивление съществуват вътрешно в конструкциите – това са силите на вътрешното триене между частиците на тялото при неговата деформация, силите на триене между отделните звена на конструкцията и др.

Силите на триене са винаги сложни функции на скоростта или преместването на масата. За опростяване на изследването в случая се приема, че силата на съпротивлението зависи линейно от скоростта - , $F_{тр} = b\dot{x}$ където b – коефициент на триене. Тогава уравнението на движение придобива вида:

$$mg - m\ddot{x} - cx - b\dot{x} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = mg \qquad (16.8)$$

Последното уравнение записваме още така:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = g \qquad (16.9)$$

където е положено:

$$\omega^2 = \frac{c}{m} \qquad 2n = \frac{b}{m} \qquad (16.10)$$

Решението на уравнение 16.9 има вида [30]:

$$x = \frac{g}{\omega^2} + X_a e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \alpha) \qquad , \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2} \tag{16.11}$$

където X_a и α - се определят от началните условия.

Решението 16.11 показва, че в случая трептенията затихват с времето, като честотата на трептене (ω_1) е по-малка от честотата на недемпфираните трептения (ω). На практика обаче за реалните конструкции ω_1 се различава много малко от честотата на недемфираните трептения ω (поради малкия коефициент на триене (b).

Ако в решението за x от 16.11 пренебрегнем статичното провисване и вземем отношението на x за две последователни трептения, ще получим:

$$\frac{x_{(t)}}{x_{(t+T_1)}} = \frac{X_a e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \alpha)}{X_a e^{-n(t+T_1)} \sin\left(\omega_1 (t + T_1) + \alpha\right)} = e^{nT_1} = const \tag{16.12}$$

Числото e^{nT} представлява големината на затихването. Колкото е по-голямо триенето (коефициента b) , толкова по-голямо ще е затихването на трептенията.

16.2. Принудени демпфирани трептения на система с една степен на свобода

Нека върху масата от фиг.16.9 действува външна сила, която се изменя по синусоидален закон:

$$P = P_a \sin \Omega t \tag{16.14}$$

където P_a – амплитудна стойност на силата, Ω - кръгова честота на изменение на силата.

а) Определяне на динамичните премествания и напрежения

Уравнението на движение на масата ще получим подобно на уравнението 16.8, като в дясната част добавим действуващата сила:

$$mg + P_a \sin \Omega t - m\ddot{x} - cx - b\dot{x} = 0 \tag{16.15}$$

Делим на m и получаваме:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = \frac{P_a}{m} \sin \Omega t + g \tag{16.16}$$

където:

$$\omega^2 = \frac{c}{m} \qquad 2n = \frac{b}{m} \tag{16.17}$$

Решението на уравнение 16.16 се състои от решението 16.11 на хомогенната част плюс частното решение, съответстващо на дясната част:

$$x = \frac{g}{\omega^2} + X_a e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \alpha) + x^* \tag{16.18}$$

Първото събираемо, както показахме по-горе, съответствува на статичното положение на масата. Второто събираемо, което изобразява собствените трептения на системата, след определен интервал от време затихва изцяло. Времето от началото на процеса до затихването на собствените трептения се нарича **преходен процес,** на който тук няма да се спираме. Затова интерес представлява само последното събираемо. Приемайки, че то е от вида на възбуждащата сила 16.14, след определена преработка, за x^* получаваме [30]:

$$x^* = \frac{P_a}{c} \beta \sin(\Omega t - \psi) \tag{16.19}$$

където:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) + \frac{4n^2}{\omega^4}}} \qquad tg\psi = \frac{2n\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \tag{16.20}$$

Тъй като $P_a/c = P.\delta_{I,I}$ е статичното преместване от амплитудната стойност на силата P, то 16.19 можем да запишем още като:

$$x^* = x_{cm} \beta \sin(\Omega t - \psi) \tag{16.21}$$

Коефициентът β, определен съгласно 16.20, е безразмерен и се нарича **коефициент на динамично усилване**, тъй като произведението $x_{cm}\beta$ е **динамичната амплитуда** на преместването x^*.

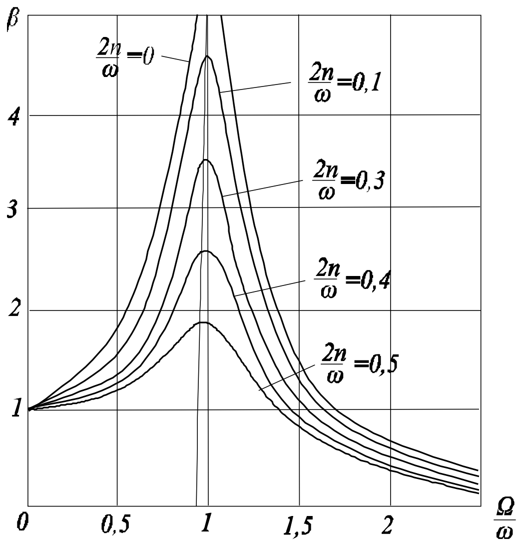
И така решението 16.18, съответно 16.21 показват, че при действие на външна сила от вида 16.14 трептенията се извършват с честотата на тази сила и с определена фазова разлика ψ спрямо нея. Амплитудата на преместването на масата зависи изключително от големината на коефициента на динамично усилване β, който на основание 16.20 зависи от съотношението между честотата на възбуждане Ω и собствената честота ω на системата, както и от демпфирането в системата (коефициента n).

Зависимостта на коефициента β от отношението Ω/ω е показано на фиг. 16.10 за различни стойности на коефициента на демпфиране *n*.

Максимална стойност коефициентът на динамично усилване получава при съвпадение на честотата на възбуждане с честотата на собствените трептения - $\Omega/\omega=1$. Това явление се нарича **резонанс** и е абсолютно недопустимо за машините и съоръженията. В състояние на резонанс и наличие на демпфиране коефициентът на динамично усилване (16.20) приема стойност:

$$\beta_{рез} = \frac{\omega}{2n} \qquad (16.22)$$

Ако в системата липсва демфиране ($n=0$), коефициентът на динамично усилване клони към безкрайност. Това означава безкрайно голяма амплитуда на преместването на масата (съответно на напреженията в системата) независимо от големината на амплитудата на възбуждащата сила.



Фиг. 16.10

В действителност няма машина или съоръжение, в което демпфирането да е равно на нула. Но въпреки това в състояние на резонанс и около резонанса коефициентът β е голям поради което тази област е забранена за продължителна работа на машините. Широчината на тази област зависи от големината на резонансната честота, като при по-ниски честоти областта се разширява до $(0,8\text{-}1,2)\ \omega_{рез}$.

За да установим дали една машина ще работи в условията на резонанс, най-напред трябва да знаем нейните собствени честоти (както ще видим, те могат да бъдат повече от една). След това се прави сравнение с честотата на възбуждане и ако се установи резонанс или близост до резонанса, се предприемат мерки за неговото отстраняване.

Ако не е възможно да променим честотата на възбуждане (да считаме, че тя е фиксирана), пристъпваме към промяна на собствената честота (честоти) на системата. При това са възможни две принципно различни решения – да направим собствената честота по-голяма от честотата на възбуждане или по-малка от честотата на възбуждане.

Ако собствената честота е по-голяма от честотата на възбуждане, никога няма да стигнем до резонанса, но коефициентът на динамично усилване ще бъде винаги по-голям от единица (виж фиг.16.10), а това значи по-високи премествания, напрежения, реакции и т.н. Такива системи се наричат **корави**.

Ако собствената честота е по-малка от честотата на възбуждане, коефициентът на динамично усилване може да се направи по-малък от единица и системата ще работи много по-спокойно. Недостатъкът на това решение е, че трябва да се премине през резонанса. Ако обаче двигателят е достатъчно мощен и може да премине бързо през резонанса, така, че системата да не се „разлюлее“ прекомерно, преминаването през резонанса не е толкова опасно. Системи, които работят след резонанса, се наричат **меки.**

Ако сме достатъчно далече от резонанса, демпфирането може да не се отчита, тъй като влияе малко на коефициента на динамично усилване-фиг.16.10. Ако положим $n=0$, от формула 16.20 за коефициента на динамично усилване ще получим:

$$\beta = \pm \frac{1}{1-\dfrac{\Omega^2}{\omega^2}} \tag{16.23}$$

Всички величини – премествания, вътрешни усилия, напрежения и реакции са функция на коефициента на динамично усилване. Те ще се променят във времето както преместването – 16.21. В частност амплитудата на динамичните напрежения ще получим по израза:

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст}\beta \tag{16.24}$$

където $\sigma_{ст}$ – напрежението в изследваната точка от сила с големина P_a, приложена върху масата статично.

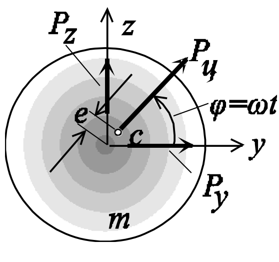
Б) Критични обороти на въртящи се валове

Въртящите се валове на електродвигатели, работни машини и др., винаги носят тежки маси като маховици, шайби, зъбни колела и др. Практически не е възможно абсолютно точно балансиране на тези маси. Центърът на тежестта им по различни причини е отклонен от оста на въртене на вала на някакво малко разстояние (ексцентрицитет) – фиг.16.11, в резултат на което при въртенето на вала масата е източник на небалансирана центробежна сила с големина:

$$P_ц = m\Omega^2 e \tag{16.25}$$

където m – маса, Ω - ъглова скорост на въртене на вала, e - ексцентрицитет. Тази сила има вертикална и хоризонтална компоненти, които се изменят във времето по закона:

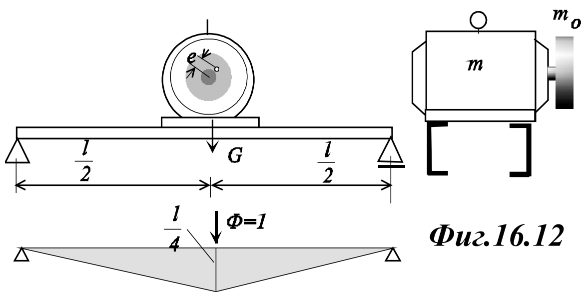
$$P_V = m\Omega^2 e \sin\Omega t \qquad P_H = m\Omega^2 e \cos\Omega t \tag{16.26}$$



Фиг. 16.11

Тези сили са точно от вида 16.14, но със растяща амплитуда. Следователно когато честотата на въртене на вала съвпадне със собствената честота на системата, ще настъпи резонанс. Съответните обороти на вала в това състояние се наричат **критични обороти**. От направените по-горе изводи за система с една степен на свобода следва, че след резонанс (след критичните обороти) коефициентът на динамично усилване намалява силно, което в случая се изразява в едно самоцентриране на диска, водещо до намаляване на динамичните премествания и напрежения във вала.

В) Пример.16.4. Върху две успоредни греди ($l=1,5$ m) от П-образен профил N12 ($J_y=304$ cm^4) е поставен електродвигател с маса $m=140$ kg, който върти небалансиран диск с маса $m_0=40$ kg с обороти $n=3000$ min^{-1} - фиг.16.12. Радиусът на дебаланса е $e=1$ mm. Да се извърши проверка на резонанс и се определи максималното динамично напрежение в гредите.



Фиг.16.12

Определяме собствената честота на системата, която е с една степен на свобода. Прилагаме единична фиктивна сила в мястото на масата и определяме диаграмата на огъващия момент. Определяме коефициента $\delta_{1,1}$ чрез преумножение на диаграмата сама на себе си:

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EJ_y}\overline{M}_y\overline{M}_y = \frac{1}{EJ_y}2\frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{l}{4}\frac{2}{3}\frac{l}{4} = \frac{l^3}{48EJ_y}$$

Собствената честота на системата ще бъде:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{1,1}(m+m_0)}} = \sqrt{\frac{48EJ_y.2}{(m+m_0)l^3}} = \sqrt{\frac{48.2.10^{11}.304.10^{-8}.2}{180.1,5^3}} = 310\,rad/s$$

Тук инерционния момент е удвоен, защото имаме две греди.

Честотата на въртене на електродвигателя е:

$$\Omega = \frac{\pi\ n}{30} = \frac{\pi\ 3000}{30} = 314\, rad/s$$

Следователно системата ще работи в условията на резонанс. За да предотвратим това, ще изберем профили с по-малък инерционен момент – например профил N8, който има инерционен момент $J_y=89,4\ cm^4$ и съпротивителен момент $Wy=22,4\ cm^3$. Преизчисляваме собствената честота с този инерционен момент по израза (б) и получаваме $\omega=167,7\ rad/s$. Тъй като честотата на въртене на двигателя остава *314 rad/s*, следва, че системата ще работи зад резонанса ($\Omega/\omega=314/167,7=1,87$), т.е. тя ще е от типа ‘мека система’.

Центробежната сила от дебаланса ще бъде:

$$P_ц = m_0\Omega^2 e = 40.314^2.1.10^{-3} = 3,944\, kN$$

Тази сила, приложена статично, ще предизвика максимални напрежения в гредите в мястото на
електродвигателя с големина:

$$\sigma_{ст} = \frac{M_y}{2W_y} = \frac{P_ц l}{4.2W_y} = \frac{3,944.10^3.1,3}{8.22,4.10^{-6}} = 33\, MPa$$

Коефициентът на динамично усилване и амплитудата на максималното динамично напрежение ще бъдат:

$$\beta = \pm\frac{1}{1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1-1,87^2} = 0,4 \quad \to \quad \sigma_{дин} = \sigma_{ст}\beta = 13,2\, MPa$$

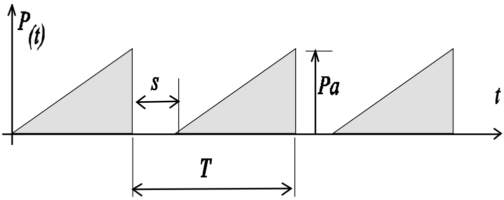
Това напрежение следва да се сумира с напрежението от теглото на двигателя (постоянно във времето):

$$\sigma_0 = \frac{M_y}{2W_y} = \frac{Gl}{4.2W_y} = \frac{180.9,81.1,3}{8.22,4.10^{-6}} = 12,8\, MPa \quad \to \quad \sigma_{рез} = \sigma_0 + \sigma_{дин} = 12,8+13,2 = 26\ MPa$$

Г) Действие на произволна периодична сила

Ако смущаващата сила не е от вида 16.14, но е периодично изменяща се във времето с известен период Т - (фиг.16.13), тя винаги може да бъде разложена в ред на **Фурие –** 16.27, съдържащ сили от вида 16.14.

Тъй като диференциалното уравнение на движение 16.16 е линейно, на основание принципа на суперпозицията резултиращото движение на масата ще бъде сума от отделните решения на това уравнение с всяка от компонентите от разложението на силата в ред на Фурие. В пакета [17] се съдържа модул за разлагане на произволна функция в ред на Фурие.

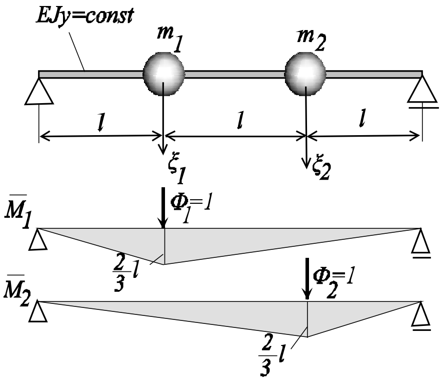


$$P_{(t)} = P_{cp} + \sum_{k=1}^{n} P_k \sin\left(\omega_k t + \alpha_k\right) \qquad (16.27)$$

Фиг. 16.13

16.3. Трептения на системи с две и повече степени на свобода

А) Честотно уравнение



Фиг.16.14

Ако масата се характеризира с повече от една обобщена координата или имаме няколко маси, получаваме система с две или повече степени на свобода. Например вал със закрепени върху него две точкови маси (фиг.16.13) ще бъде система с две степени на свобода, защото в деформирано състояние положението на масите се характеризира с две вертикални координати ξ_1 и ξ_2. Масата може да е само една, но да е с две или повече степени на свобода, защото знаем, че в пространството едно тяло в общия случай има шест степени на свобода.

За да получим честотното уравнение (уравнение, от което се определят собствените честоти на системата) е нужно най-напред да напишем диференциалните уравнения на движение. Това може да стане с апарата на **Лагранж**, известен от Теоретичната механика, с метода на кинетостатиката (използван по-горе за система с една степен на свобода) или с метода на Съпротивление на материалите, който ще използваме тук. За преместванията ξ_1 и ξ_2 можем да запишем следните канонични уравнения (разгледани в гл.10) :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 \\ \xi_2 &= \delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 \end{aligned} \qquad (16.28)$$

където X_1, X_2 – сили, действуващи по направление на движение на масите m_1 и m_2, δ_{ij} – ($i=1,2;\ j=1,2$) коефициенти, представляващи преместване в направление i от единична сила, приложена в направление j. Тези коефициенти се определят чрез интегралите на Максвел-Мор чрез преумножение на съответните единични диаграми.

При свободните трептения в ролята на силите X_1 и X_2 влизат инерционните сили:

$$X_1 = -m_1\ddot{\xi}_1 \qquad X_2 = -m_2\ddot{\xi}_2 \tag{16.29}$$

След заместване на 16.29 в 16.28, получаваме:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \delta_{1,1}(-m_1\ddot{\xi}_1) + \delta_{1,2}(-m_2\ddot{\xi}_2) \\ \xi_2 &= \delta_{2,1}(-m_1\ddot{\xi}_1) + \delta_{2,2}(-m_2\ddot{\xi}_2) \end{aligned} \tag{16.30}$$

Решението на 16.30 търсим във вида:

$$\xi_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha) \qquad \xi_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha) \tag{16.31}$$

където A_1, A_2- амплитуди на трептене на съответните маси.

След заместване на 16.31 в 16.30, получаваме:

$$\begin{vmatrix} m_1\delta_{1,1}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{1,2}\omega^2 \\ m_1\delta_{2,1}\omega^2 & m_2\delta_{2,2}\omega^2 - 1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = 0 \tag{16.32}$$

Ненулевото решение за амплитудите ще получим, ако приравним на нула детерминантата от матрицата пред вектора на неизвестните:

$$\det \begin{vmatrix} m_1\delta_{1,1}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{1,2}\omega^2 \\ m_1\delta_{2,1}\omega^2 & m_2\delta_{2,2}\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{16.33}$$

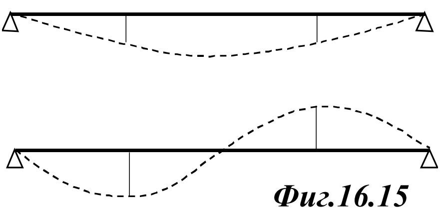
Уравнение 16.33 представлява честотното уравнение на системата. След развитие на детерминантата ще получим биквадратно уравнение за неизвестните честоти, решението на което относно квадрата на честотата ще бъде:

$$\omega^2 = \frac{m_1\delta_{1,1} + m_2\delta_{2,2} \pm \sqrt{(m_1\delta_{1,1} - m_2\delta_{2,2})^2 + 4m_1m_2\delta_{1,2}^2}}{2m_1m_2(\delta_{1,1}\delta_{2,2} - \delta_{1,2}^2)} \tag{16.34}$$

От тук определяме двете честоти на системата.

По подобен начин постъпваме, ако степените на свобода са повече от две. За система със n степени на свобода детерминантата за честотното уравнение ще бъде очевидно също от ред n. Намирането на корените в този случай обаче ще бъде изключително затруднено, ако задачата се решава аналитично. Затова в недалечното минало са предлагани различни приближени методи за по-лесно решаване на тази задача. Днес в това няма никаква необходимост, тъй като с помощта на числените методи можем да решим задача с произволен брой степени на свобода.

Б) Определяне на формите на трептене



Фиг.16.15

Огънатата ос на гредата (рамката) при трептене с дадена собствена честота **наричаме форма на трептене**. В случая, за системата от фиг.16.14, за да намерим амплитудите на масите A_1 и A_2 при честота ω_1, заместваме тази честота в системата 16.32 и я решаваме. Но при тази честота детерминантата на системата е равна на нула и следователно едното от уравненията е следствие на другото. Затова полагаме $A_1=1$, а от едното от двете уравнения намираме другата амплитуда. Или имаме следното решение:

$$A_1 = 1 \qquad A_2 = \frac{1 - m_1\delta_{1,1}\omega_1^2}{m_2\delta_{1,2}\omega_1^2} \tag{16.35}$$

По същия начин, заместваме в 16.32 вместо ω честотата ω_2 и получаваме формата на трептене, съответстваща за втората честота. Ако се изобразят графически, тези форми имат вида, подобни на показаните на фиг.16.15 форми.

Въвеждаме понятието **възел** като точка от деформираната ос на системата, която при трептене остава неподвижна (опорите се изключват). Тогава формата на трептене, съответстваща на първата собствена честота няма възли и се нарича **безвъзлова форма,** а формата, съответстваща на втората собствена честота е с един възел или **едновъзлова**. По броя на възлите може да се познае поредния номер на собствената честота, тъй като те са с единица по-малко от номера на честотата.

Обръщаме внимание, че намерените амплитуди на трептене A_1 и A_2 за всяка от честотите не са действителните, а т.н. **относителни амплитуди**. Резултиращото решение за преместванията ще има вида:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= A\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+B\sin(\omega_2 t+\alpha_2)\\ \xi_2 &= A\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+B\sin(\omega_2 t+\alpha_2)\end{aligned} \qquad (16.36)$$

Четирите неизвестни константи *A, B,* α_1 и α_2 се определят от началните условия за премествания и скоростите на двете маси.

В) Пример 16.5. Да се определят собствените честоти на двумасовата система от фиг.16.14, ако $m_1=m_2=m$, $EJy=const$.

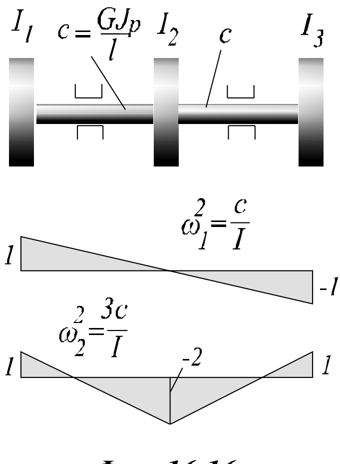
Определяме коефициентите $\delta_{i,j}$ чрез преумножаване на съответните единични диаграми (виж фиг.16.14):

$$\delta_{1,1}=\frac{1}{EJ_y}\overline{M}_1\overline{M}_1=\frac{4l^3}{9EJ_y}\qquad \delta_{2,2}=\frac{1}{EJ_y}\overline{M}_2\overline{M}_2=\frac{4l^3}{9EJ_y}\qquad \delta_{1,2}=\delta_{2,1}=\frac{1}{EJ_y}\overline{M}_1\overline{M}_1=\frac{7l^3}{18EJ_y}$$

След заместване на $m_1=m_2=m$ в 16.28, получаваме:

$$\omega^2=\frac{1}{m}\frac{\delta_{1,1}\pm\delta_{1,2}}{\delta_{1,1}^2-\delta_{1,2}^2}\quad\rightarrow\quad \omega_1^2=1{,}2\frac{EJ_y}{ml^3}\quad,\quad \omega_2^2=18\frac{EJ_y}{ml^3}$$

За определяне на относителните амплитуди на първата собствена форма заместваме ω_1^2 в 16.29 и получаваме (при $m_1=m_2=m$), че $A_1=1$, $A_2=1$. Аналогично замествайки ω_2^2 в 16.29, получаваме $A_1=1$, $A_2=-1$. Формите на трептене за тези честоти са показани на фиг.16.15. Поради симетрията на системата, първата форма се получава симетрична, а втората – антисиметрична.



Фиг. 16.16

Г) Пример 16.6. Да се определят честотите и формите на свободните усукващи трептения на системата, състояща се от три еднакви диска с масов инерционен момент *I*, съединени с два пръта с коравина на усукване $c=GJ_p/l$ - фиг.16.16.

Посредством метода на кинетостатиката за равновесието на втория диск можем да запишем:

$$I_2\ddot{\varphi}_2+c(\varphi_2-\varphi_1)+c(\varphi_2-\varphi_3)=0$$

Аналогично получаваме останалите две уравнения. За трите диска ще е в сила следната система диференциални уравнения:

$$
\begin{aligned}
&I_1\ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\
&I_2\ddot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) + c(\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \\
&I_3\ddot{\varphi}_3 + c(\varphi_3 - \varphi_2) = 0
\end{aligned} \tag{а}
$$

Решението търсим във вида:

$$\varphi_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha) \quad \varphi_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha) \quad \varphi_3 = A_3 \sin(\omega t + \alpha) \tag{б}$$

Заместваме (б) в (а) и получаваме следната система алгебрични уравнения:

$$\begin{vmatrix} c - I_1\omega^2 & -c & 0 \\ -c & 2c - I_2\omega^2 & -c \\ 0 & -c & c - I_3\omega^2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = 0 \tag{в}$$

Честотното уравнение получаваме чрез приравняване детерминантата на матрицата пред неизвестните амплитуди на нула. При еднакви масови инерционни моменти на дисковете след развитието на детерминантата, получаваме:

$$(c - I\omega^2)\left((2c - I\omega^2)(c - I\omega^2) - 2c^2\right) = 0 \tag{г}$$

Корените на това уравнение са:

$$\omega_1^2 = \frac{c}{I} = \frac{GJ_p}{l.I} \qquad \omega_2^2 = \frac{3c}{I} = \frac{3GJ_p}{l.I} \qquad \omega_3 = 0 \tag{д}$$

Нулевият корен не представлява интерес – той отговаря на въртенето на вала като твърдо тяло.

Формите на трептене, съответстващи на първите две честоти, определяме след заместване на всяка от честотите (д) в системата (в), където полагайки $A_1=1$, от първите две уравнения определяме другите две относителни амплитуди. Формите на трептене са показани на фиг.16.16.

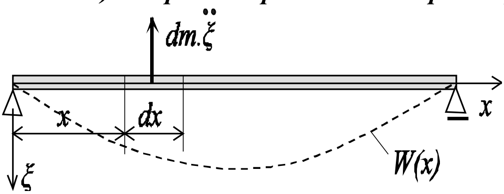
16.4. Трептения на системи са разпределени параметри

По-горе разгледахме трептения на системи с краен брой степени на свобода. Такива системи съдържат задължително съсредоточени маси, положението на които в пространството се определя с краен брой координати. Ако разгледаме обаче греда, подпряна на две опори, която не носи никакви съсредоточени маси, как да определим честотите на свободните трептения ?

Едно възможно решение е да разделим изкуствено гредата на няколко участъка и съсредоточим масите на всеки от участъците във възлите, а самите участъци приемем за безмасови. Тогава можем да използуваме изложената по-горе теория. Това решение се използува много често в практиката, но има недостатък, че решенито ще е винаги приближено.

Съществува възможност за точно решение на задачата, разглеждайки гредата с безброй съсредоточени маси или като система с **разпределени праметри** - система, при която масата е разпределена по цялата греда (рамка).

А) Напречни трептения на греда с разпределени параметри



Фиг.16.17

Ще разгледаме греда на две опори с постоянно напречно сечение, извършваща свободни напречни трептения. Напречното преместване ξ зависи освен от времето *t,* така и от координатата *x* на точката от оста на гредата, т.е $\xi=\xi(x,t)$.

Поради тази причина диференциалното уравнение на еластичната линия ще запишем в частни производни:

$$EJ_y \frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} = q_{(x,t)} \tag{16.37}$$

При свободните трептения на гредата в ролята на разпределените сили влизат инерционните сили, които за единица дължина от гредата ще бъдат:

$$q_{(x,t)} = -\frac{dm\ddot{\xi}}{dx} = -\frac{dxF\rho\,\ddot{\xi}}{dx} = -F\rho\,\ddot{\xi} \tag{16.38}$$

където F – напречно сечение на гредата, ρ -плътност на материала на гредата.

От тук следва:

$$EJ_y \frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} + F\rho\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\,0 \tag{16.39}$$

Уравнение 16.33 е диференциалното уравнение на напречните трептения на гредата, което е в частни производни. За напречното преместване ξ приемаме решение във вид на произведение от две функции, едната от които зависи само от координатата x, а другата – от времето t:

$$\xi_{(x,t)} = W_{(x)} \sin(\omega t + \alpha) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} = \frac{d^4 W}{dx^4} \sin(\omega t + \alpha) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 W_{(x)} \sin(\omega t + \alpha)$$

(16.40)

Тук функцията $W_{(x)}$ описва деформираната ос на гредата при трептене (собствената форма на трептене). След заместване на 16.40 в 16.39, получаваме:

$$EJ_y \frac{d^4 W}{dx^4} - \rho F \omega^2 W = 0 \tag{16.41}$$

Уравнение 16.41, за разлика от 16.39, е обикновено диференциално уравнение. Обикновено то се привежда във вида:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - k^4 W = 0, \qquad \text{където} \qquad k^4 = \omega^2 \frac{\rho F}{EJ_y} \tag{16.42}$$

Решението на уравнение 16.42 има вида:

$$W = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) + C_3 sh(kx) + C_4 ch(kx) \tag{16.43}$$

Константите $C_1, .., C_4$ се определят от граничните условия, от които се получава и честотното уравнение на гредата.

В случая от фиг.16.17 граничните условия са:

При $x=0 \rightarrow W(0)=0$ и $W''(0)=0$; При $x=l \rightarrow W(l)=0$ и $W''(l)=0$.

Определяме производните на W:

$$W' = C_1 k \cos(kx) - C_2 k \sin(kx) + C_3 k\, ch(kx) + C_4 k\, sh(kx)$$
$$W'' = -C_1 k^2 \sin(kx) - C_2 k^2 \cos(kx) + C_3 k^2\, sh(kx) + C_4 k^2\, ch(kx)$$

(16.44)

От първото и второто гранично условия определяме, че $C_2=C_4=0$. От третото и четвърто гранични условия получаваме:

$$\begin{aligned} C_1 \sin(kl) + C_3 sh(kl) &= 0 \\ -C_1 \sin(kl) + C_3 sh(kl) &= 0 \end{aligned} \tag{16.45}$$

Тази хомогенна система уравнения ще има ненулево решение, ако е изпълнено условието:

$$\det\begin{vmatrix} \sin(kl) & sh(kl) \\ -\sin(kl) & sh(kl) \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 2\sin(kl)sh(kl) = 0 \qquad (16.46)$$

Понеже функцията *sh* е нула само за аргумент нула, остава:

$$\sin(kl) = 0 \quad \rightarrow \quad kl = n\pi \qquad (16.47)$$

Заместваме *k* от 16.36 и за собствената честота получаваме:

$$\omega = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_y}{\rho F}} \qquad (n = 1,2,3...\infty) \qquad (16.48)$$

Както можехме да предположим, сега имаме безброй собствени честоти.

За определяне на собствените форми на трептене са необходими интеграционните константи $C_1,..,C_4$. По-горе определихме, че $C_2=C_4=0$. От първото уравнение на 16.45 при всяка собствена честота $sin(kl)$ се анулира и следва, че константата $C_3=0$. Така от решението 16.43 остава:

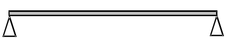
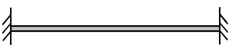
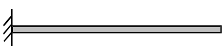
$$W = C_1\sin(kx) = C_1\sin(n\pi\frac{x}{l}) \qquad (16.49)$$

От полученото решение следва, че при първата собствена честота гредата ще се огъне по една полувълна от синусоидата, при втората – по две полувълни и т.н.

Решението за напречното преместване във времето ще получим, замествайки 16.49 в 16.40:

$$\xi = C_1\sin(n\pi\frac{x}{l})\sin(\omega t + \alpha) \qquad (16.50)$$

Таб.16.1

$\omega_K = \frac{K^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJy}{\rho F}}$	K_1	K_2	K_3
	3,14	6,28	9,43
	4,73	7,85	10,99
	3,93	7,07	10,21
	1,87	4,69	7,85
	4,73	7,85	10,99

Константите C_1 и α определяме от началните условия на движението. За целата е нужно да знаем преместването и скоростта на една точка от гредата.

Собствените честоти на гредата при друго закрепване могат да се намерят след удовлетворяване на съответните гранични условия. В табл.16.1 са показани първите три собствени честоти на напречните трептения на пет често срещани схеми на закрепване на гредата. Последната схема в таблицата се отнася за свободна (незакрепена) греда.

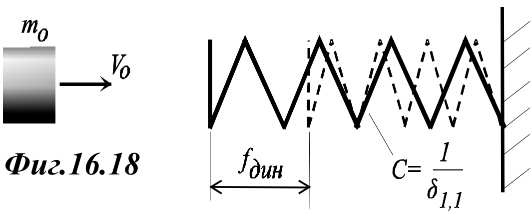
Ще обърнем внимание, че ако гредата извършваше надлъжни или усукващи трептения, подходът за решение е аналогичен на разгледания. В тези случаи се получават също частни диференциални уравнения, решението на които след удовлетворяване на граничните условия водят до безброй собствени честоти. Тези уравнения са разгледани в специализираната литература по теория на трептенията – [3].

16.5. Ударно натоварване

Ударно натоварване имаме, когато външния товар се прилага за много кратко време, обикновено за по-малко от секунда, като при взривно натоварване времето може да намалее до хилядни от секундата . Точното решение на задачата е свързано с редица трудности поради това, че в мястото на удара могат да възникнат пластични деформации, в удареното тяло се пораждат вълнови процеси, част от енергията на удрящото тяло при удара се разсейва и др. Поради това тук ще разгледаме приближена енергетична теория, в основата на която стои предположението, че цялата кинетична енергия на удрящото тяло се превръща без загуби в потенциална енергия на деформацията на удареното тяло.

$$K_0=U \tag{16.51}$$

Този подход дава възможност да се определят максималните стойности на силите, преместванията и напреженията в удареното тяло. При това при удара могат да възникнат деформации от огъване, усукване опън или натиск.



Фиг.16.18

А) Хоризонтален удар

Дадена маса с големина m_o се движи равномерно и праволинейно със скорост V_o и се удря в еластично тяло, показано на фигурата като пружина. При това масата на удрящото тяло е значително по-голяма от масата на удряното тяло. Търсим максималната сила P_{max} и максималното динамично преместване $f_{дин}$ на еластичното тяло в мястото на удара.

Кинетичната енергия K_0 на движещото се тяло ще бъде:

$$K_0 = m_0 \frac{V_0^2}{2} \tag{16.52}$$

Потенциалната енергия на деформация U на удареното тяло ще бъде:

$$U = \frac{1}{2}P_{\max}f_{дин} = \frac{1}{2}P_{\max}P_{\max}\delta_{1,1} = \frac{1}{2}P_{\max}^2\delta_{1,1} \qquad (16.53)$$

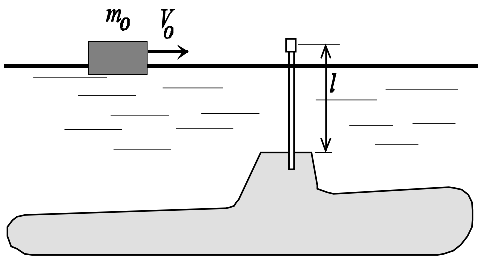
След заместване на 16.52 и 16.53 в 16.51, определяме:

$$P_{\max} = V_0\sqrt{\frac{m_0}{\delta_{1,1}}} \qquad (16.54)$$

Максималното динамично преместване ще бъде:

$$f_{дин} = P_{\max}\delta_{1,1} = V_0\sqrt{m_0\delta_{1,1}} \qquad (16.55)$$

Б) Пример 16.7. Подводна лодка стои на позиция на перископна дълбочина. Леден блок с маса $m_o=250\ kg$, движещ се със скорост $V_o=1,5\ m/s$ се удря в перископа на лодката – фиг.16.19. Да се изчислят максималните напрежения в перископната тръба, ако нейната дължина е $l=5\ m$, има външен диаметър $D=35\ cm$, вътрешен диаметър - $d=24\ cm$ и модул на еластичност $E=2.10^{11}\ Pa$.



Фиг.16.19

Определяме преместването $\delta_{1,1}$ в горния край на перископната тръба от единична фиктивна сила. Перископната тръба представлява конзолно закрепена греда и следователно:

$$\delta_{1,1} = \frac{l^3}{3EJ_y} = \frac{5^3.}{3.2.10^{11}.5,74.10^{-4}} = 3,63.10^{-7}\ \frac{m}{N}$$

където:

$$J_y = \frac{\pi D^4}{64}\left(1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right) = \frac{\pi\ 35^4}{64}\left(1-\left(\frac{24}{35}\right)^4\right) = 5,74.10^4\ cm^4$$

Максималната сила върху перископната тръба при удара съгласно 16.48 ще бъде:

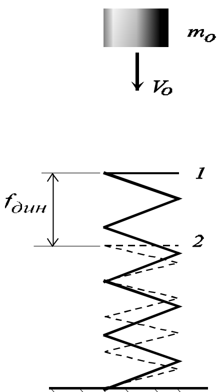
$$P_{\max} = V_0\sqrt{\frac{m_0}{\delta_{1,1}}} = 1,5\sqrt{\frac{250}{3,63.10^{-7}}} = 39,4\ kN$$

Максималното напрежение в основата на перископната тръба ще бъде:

$$\sigma_{max} = \frac{P_{max} l}{W_y} = \frac{P_{max} l.D}{2J_y} = \frac{39,4.10^3.5.0,35}{2.5,74.10^4} = 60\,MPa$$

В) Вертикален удар

Маса с големина m_o и скорост по вертикалата V_o пада върху еластично деформируемо тяло, изобразено на фиг.16.20 с пружина. Ще определим динамичното преместване на тялото в мястото на удара.



Фиг.16.20

Уравнението на енергийния баланс в този случай ще има вида:

$$K_0 + \Pi_{1-2} = U \tag{16.56}$$

Тук K_0 – кинетичната енергия на удрящото тяло в момента на удара, Π_{1-2} – изменение на потенциалната енергия на удрящото тяло от момента на удара до пълната деформация ($f_{дин}$) на удареното тяло, U – потенциална енергия на деформация на удареното тяло. При това:

$$\Pi_{1-2} = m_0 g.f_{дин} \qquad U = \frac{1}{2} P_{max} f_{дин} = \frac{1}{2}\frac{f_{дин}}{\delta_{11}} f_{дин} = \frac{1}{2}\frac{f_{дин}^2}{\delta_{11}} \tag{16.57}$$

Заместваме 16.57 в 16.56 и получаваме:

$$f_{дин}^2 - 2m_0 g\delta_{11} f_{дин} - 2K_0\delta_{11} = 0 \tag{16.58}$$

Тук произведението $m_0 g\delta_{11}$ представлява статичната деформация на удареното тяло от теглото на удрящото тяло, т.е.:

$$f_{ст} = m_0 g\delta_{11} \tag{16.59}$$

Тогава уравнение 16.58 ще придобие вида:

$$f_{дин}^2 - 2f_{ст} f_{дин} - 2K_0\delta_{11} = 0 \tag{16.60}$$

Решението на това уравнение относно динамичното преместване $f_{дин}$ има вида:

$$f_{дин} = f_{ст}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2K_0\delta_{11}}{f_{ст}^2}}\right) = f_{ст}\chi \tag{16.61}$$

където χ - **динамичен коефициент**.

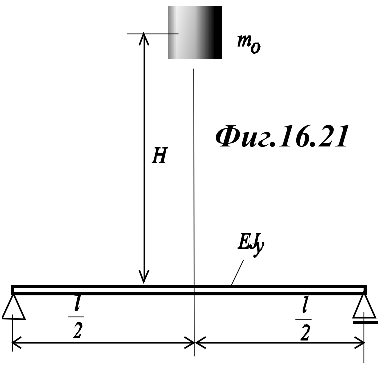
$$\chi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2K_0\delta_{11}}{f_{ст}^2}} \tag{16.62}$$

Максималните динамични напрежения са пропорционални на динамичните премествания и затова:

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст}\chi \tag{16.63}$$

От 16.62 получаваме, че ако $K_0=0$, тогава $\chi=2$, т.е. при мигновено приложена сила максималните премествания и напрежения са два пъти по-големи от преместванията и напреженията при статично приложена сила.

Г) Пример 16.8. Да се определи динамичния коефициент при удара на тяло с маса m_0, падащо от височина H без начална скорост по средата на греда с дължина l и коравина на огъване EJy, подпряна на две опори – фиг. 16.21.



Фиг.16.21

От закона за запазване на енергията, кинетичната енергия на масата в момента на удара ще бъде равна на началната му потенциалната енергия, т.е

$$K_0=m_0.gH \tag{а}$$

Коефициентът $\delta_{1,1}$ за същата греда беше определен в пример 16.4:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{48EJ_y} \tag{б}$$

Статичната деформация на гредата от теглото на масата ще бъде:

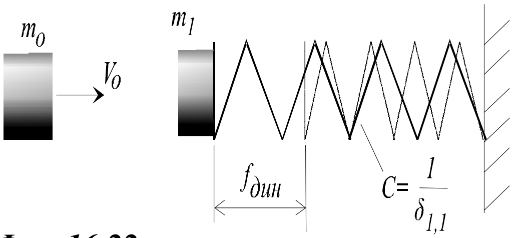
$$f_{ст} = m_0 g.\delta_{11} \tag{в}$$

Заместваме (а), (б) и (в) в 16.56 и получаваме:

$$\chi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2K_0\delta_{11}}{f_{ст}^2}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2m_0 gH\delta_{11}}{\left(m_0 g\delta_{11}\right)^2}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{m_0 g\delta_{11}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H48EJ_y}{m_0 g l^3}}$$

Д) Удар при наличие на междинна буферна маса

В предидущите случаи считахме, че масата на удряното тяло се пренебрегва в сравнение с масата на удрящото тяло. В някои случаи това е недопустимо, а при други случаи такава допълнителна (буферна) маса с големина m_1 – фиг.16.22 се поставя нарочно. Ще считаме, че след удара двете маси – m_0 и m_1 'прилепват' и се движат съвместно със скорост V_1.



От закона за съхранение количеството на движение можем да запишем:

Фиг. 16.22

$$m_0 V_0 = (m_0 + m_1)V_1 \quad \rightarrow \quad V_1 = V_0 \frac{m_0}{m_0 + m_1} \qquad (16.64)$$

Кинетичната енергия на двете тела ще бъде: (16.65)

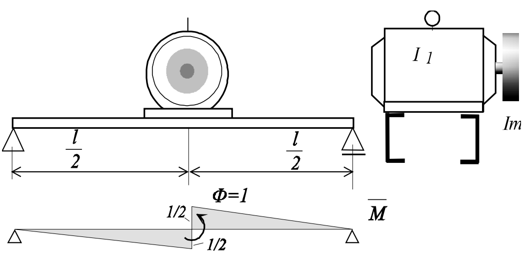
$$K = \frac{1}{2}(m_0 + m_1)V_1^2 = \frac{1}{2}(m_0 + m_1)\left(V_0 \frac{m_0}{m_0 + m_1}\right)^2 = \frac{1}{2}m_0 V_0^2 \frac{m_0}{m_0 + m_1} = K_0 \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_0}}$$

При приетите предпоставки задачата не се отличава от предидущите, затова динамичният коефициент при удара ще получим, ако в израза 16.62 заместим кинетичната енергия съгласно 16.65

$$\chi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2K_0 \delta_{11}}{f_{cm}^2\left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right)}} \qquad (16.66)$$

От 16.66 следва, че при наличие на буферна маса коефициентът на динамичност при удар намалява.

Е) Пример 16.9. Маховик с масов инерционен момент I_m се върти с *n мин*$^{-1}$ от електромотор с инерционен момент на статора I_1. Електромоторът е закрепен върху греда съгласно фиг. 16.23. Да се определи динамичния момент върху гредата при внезапно спиране на електромотора.



Фиг. 16.23

Считаме, че кинетичната енергия на

въртящите се части (K_0) – ротор и маховик при внезапното спиране на електромотора се предава изцяло върху гредата, като се натрупва във вид на потенциална енергия на деформация (U). Кинетичната енергия ще определим като за система с буфер (формула 16.59), считайки, че статорът на електромотора се явява междинен буфер:

$$K = K_0 \frac{1}{1+\dfrac{I_1}{I_m}} = \frac{1}{2} I_m \omega^2 \frac{1}{1+\dfrac{I_1}{I_m}} \qquad \text{(а)}$$

Потенциалната енергия на деформация на гредата ще бъде:

$$U = \frac{1}{2} M_{дин} \theta_{дин} = \frac{1}{2} M_{дин} M_{дин} \delta_{1,1} = \frac{1}{2} M_{дин}^2 \delta_{1,1} \qquad \text{(б)}$$

където $\delta_{1,1}$ – завъртване на гредата в мястото на електромотора от единичен фиктивен момент.

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EJ_y} \overline{M}_y \overline{M}_y = \frac{1}{EJ_y} 2 \frac{1}{2} \frac{l}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{l}{6EJ_y} \qquad \text{(в)}$$

Приравняваме кинетичната и потенциална енергия (изрази (а) и (б)) и получаваме:

$$M_{дин} = \sqrt{\frac{I_m \omega^2}{\delta_{1,1}} \frac{1}{1+\dfrac{I_1}{I_m}}} = \sqrt{I_m \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 \frac{1}{1+\dfrac{I_1}{I_m}} \frac{6EJ_y}{l}} \qquad \text{(г)}$$

Ж) Начини за намаляване на динамичния коефициент при удар.

От анализа на формула 16.60 установяваме, че минималната стойност на динамичния коефициент е равна на две, а максималната стойност може да достигне според енергията на удрящото тяло много големи стойности. Този коефициент може да бъде намален по няколко начина:

- чрез използуване на буферна маса
- чрез увеличаване на статичната деформация на удареното тяло, т.е. то бъде направено по еластично. Това може да стане чрез конструктивни мерки и чрез използуване на материали с по-нисък модул на еластичност.

17. МЕТОД НА КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ

Методът на крайните елементи (**МКЕ**, английска абревиатура **FEM** - Finite Element Method) води началото си от средата на петдесетте години на нашия век. Основната идея на метода е раздробяването на непрекъснатата среда (континума) на малки елементи с определена форма и размери (откъдето идва названието на метода), за която се търси решението на съответната задача. Когато решението за един елемент е известно, може да се намери решението за цялата област.

Макар, че идеята за раздробяване на континума на малки елементи принадлежи в миналото още на Поасон, практическата реализация на метода бе възможна едва през последните няколко десетилетия успоредно с развитието на електронно-изчислителната техника.

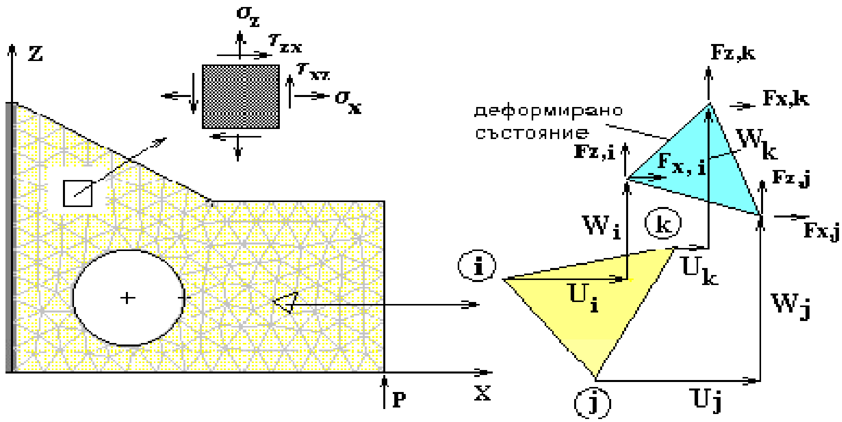
От математична гледна точка е доказано, че МКЕ е метод за числено приближено решение на системи от частни диференциални уравнения, подчинени на определени гранични условия при произволна форма на разглежданата област. Тъй като в този случай няма аналитични решения, методът е намерил широко приложение във всички области на естествознанието, където процесите се описват със системи от частни диференциални уравнения - механиката на твърдото деформируемо тяло, топлопренасянето, масопренасянето, хидродинамиката, геомеханиката, в теорията на полетата, електрониката и др. Но първоначално методът е приложен в строителната механика.

При излагането на теорията на метода ще се придържаме към инженерния подход, използван в една от фундаменталните книги за МКЕ - [36], като се спрем само на равнинно напрегнато състояние. Методът може да се приложи и за всички други видове конструкции – прътови конструкции, плочи, черупки и масивни тела.

17.1. Равнинно напрегнато състояние

Равнинно напрегнато състояние имаме, когато всички напрежения, действуващи в областта на изследваната точка лежат в една равнина. Получава се, когато натовареното тяло е равнинно и самото натоварване лежи в същата равнина. Натовареното тяло в този случай се нарича още **гредостена**. Формата на тялото в равнината може да бъде произволна.

На фиг.17.1 е показана гредостена с отвор, имаща постоянна дебелина (*h*), запъната по един от ръбовете и натоварена в ранината на стената. Показана е мрежата от триъгълни крайни елементи с които е дискретизирана стената. За описание на параметрите на напрегнатото и деформирано състояние е приета правоъгълна координатна система XZ, показана на фигурата.



Фиг.17.1.Равнинно напрегнато състояние

Триъгълният краен елемент е най-простия вид краен елемент, който е намерил широко приложение по няколко причини: с него могат да се опишат двумерни области със произволна форма; теорията за този тип елемент е най-проста; доказано е, че при сгъстяване на мрежата, решението клони към точното и др.

Освен триъгълен елемент, областта може да се дискретизира с елементи с произволна форма, дори и такива с криволинейни граници. Някои съвременни пакети за анализ по МКЕ работят с повече от 100 вида крайни елементи.

А) Премествания

Разглеждаме един от триъгълните крайни елементи с означените на него възли *I, J, K* - (фиг.17.1) и преместванията на възлите *U, W*, които ще считаме за положителни, когато се извършват по посока на положителните оси *XZ*. Преместванията (неизвестни) обединяваме в следния вектор δ:

$$\delta_e = \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \\ U_j \\ W_j \\ U_k \\ W_k \end{Bmatrix} \tag{17.1}$$

Ако за цялата област гредостената има N възела, общият брой на неизвестните премествания ще бъде $2N$, тъй като всеки възел в равнината изпитва по две премествания.

За преместванията в границите на триъгълният елемент приемаме, че могат да се опишат с помощта на следните функции:

$$U_{(x,z)} = N_i U_i + N_j U_j + N_k U_k$$
$$W_{(x,z)} = N_i W_i + N_j W_j + N_k W_k \qquad (17.2)$$

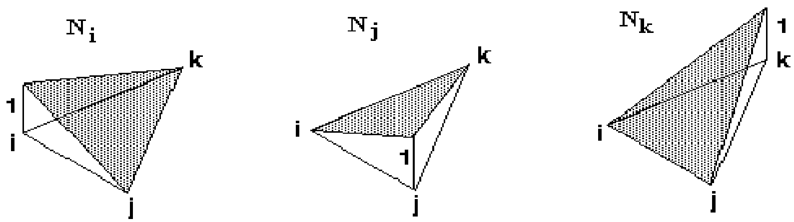
където N_i, N_j,N_k - функции на координатите x,z. Тези функции трябва да са такива, че когато в (17.2) заместим координатите на възлите, трябва да получим преместванията на възлите, т.е.:

$$U(x_i,z_i) = U_i \qquad U(x_j,z_j) = U_j \qquad U(x_k,z_k) = U_k$$
$$W(x_i,z_i) = W_i \qquad W(x_j,z_j) = W_j \qquad W(x_k,z_k) = W_k \qquad (17.3)$$

Това ще бъде възможно, ако функциите N удовлетворят следните условия:

$$N_i(x_i,z_i) = 1 \quad N_i(x_j,z_j) = 0 \quad N_i(x_k,z_k) = 0$$
$$N_j(x_i,z_i) = 0 \quad N_j(x_j,z_j) = 1 \quad N_j(x_k,z_k) = 0 \qquad (17.4)$$
$$N_k(x_i,z_i) = 0 \quad N_k(x_k,z_k) = 0 \quad N_k(x_k,z_k) = 1$$

Графически условията (17.4) биха изглеждали както е показано на фиг. 17.2.



Фиг.17.2. Функции на формата

Така дефинирани функциите N_i, N_j, и N_k се наричат **функции на формата** и играят огромна роля в метода на крайните елементи. В конкретния случай е очевидно, че тези три функции трябва да описват равнини, тъй като равнината може да се дефинира с три точки, т.е.:

$$N_i(x,z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 z$$
$$N_j(x,z) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 z \qquad (17.5)$$
$$N_k(x,z) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 z$$

където коефициентите α, β, γ могат да се получат, като се наложат условията (17.4). Така например ако се удовлетворят трите условия за функцията Ni, ще получим следната система алгебрични уравнения относно неизвестните коефициенти α_i:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 z_i = 1$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 z_j = 0 \qquad (17.6)$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 z_k = 0$$

След решението на (17.6) получаваме:

$$\alpha_1 = \frac{a_i}{2\Delta} \alpha_2 = \frac{b_i}{2\Delta} \alpha_3 = \frac{c_i}{2\Delta} \qquad (17.7)$$

където Δ - площта на триъгълника *ijk,* а коефициентите *a, b, c* се определят по изразите:

$$a_i = x_j z_k - x_k z_j \qquad b_i = z_j - z_k \qquad c_i = x_k - x_j \qquad (17.8)$$

Коефициентите β и γ се определят по аналогичен начин чрез циклична замяна на индексите в уравнения (17.7) и (17.8).

Забележка: Обхождането на възлите на елемента трябва да е в посока, обратна на посоката на движение на часовата стрелка, за да се получи площта Δ положителна.

Така функциите на формата (17.5) са напълно определени чрез координатите на прилежащите възли на елемента, а преместванията в границите на елемента са определени чрез функциите на формата и преместванията на прилежащите възли на елемента- уравнения (17.2). Последните можем да запишем в матричен вид по следния начин:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \\ U_j \\ W_j \\ U_k \\ W_k \end{Bmatrix} \qquad (17.9)$$

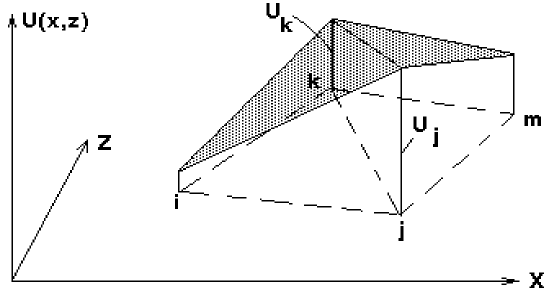
или: $$\boldsymbol{f_e} = \boldsymbol{N}.\boldsymbol{\delta}_e \qquad (17.10)$$

където: $$\boldsymbol{f_e} = \begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix}$$

(17.11)

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \qquad (17.12)$$

В теорията на метода на крайните елементи към функциите на формата се поставят определени изисквания, които ако бъдат изпълнени, сходимостта на решението ще бъде гарантирана, т.е. намалявайки размерите на крайните елементи, решението ще клони към точното. Тези изисквания могат да се обобщят в следните три критерия:



Фиг.17.3. Непрекъснатост на функциите на формата

Критерий 1: Функциите на формата трябва да осигуряват непрекъснатост на преместванията на границите на елемента, т.е., преместванията да са кинематично съвместими.

В разгледания случай този критерий се изпълнява, тъй като на границите на два съседни елемента преместванията се описват с функции, геометрическия смисъл на които са две равнини, които поради факта, че имат две общи точки във възлите, следва, че съвпадат по цялата контактна граница -фиг. 17.3

Критерий 2: Функциите на формата трябва да осигуряват преместване на елемента като твърдо тяло.

В случая по-горе този критерий се изпълнява благодарение на постоянните членове $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$.

Критерий 3: Функциите на формата трябва да осигуряват възможност за осъществяване на постоянна деформация (напрежения) в границите на елемента.

Изпълнението на този критерий в конкретния случай ще разгледаме по-долу.

Б) Деформации

Ако е известно полето на преместванията на дадено тяло, то е известно всичко за напрегнатото и деформираното му състояние.

В конкретния случай деформациите в границите на елемента се определят на основание зависимостите на **Коши**, които за равнинно напрегнато състояние имат вида:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial W}{\partial z} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \tag{17.13}$$

Въвеждаме вектора на деформираното състояние $\boldsymbol{\varepsilon}$ на елемента:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{17.14}$$

Тогава зависимостите (17.13) могат да се запишат във вида:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} \tag{17.15}$$

или в съкратен вид: $$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{L}.\boldsymbol{f}_e \tag{17.16}$$

където $\boldsymbol{L}$ е диференциален оператор:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{17.17}$$

Като вземем предвид (17.10) уравнение (17.16) придобива вида:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{LN\delta}_e \tag{17.18}$$

или: $$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{B\delta}_e \tag{17.19}$$

където: $$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}.\boldsymbol{N} \tag{17.20}$$

или прилагайки (17.17) върху (17.12) получаваме:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \tag{17.21}$$

Както се вижда от (17.19) деформациите ε за елемента се определят чрез възловите премествания δ на елемента. За целта се използва матрицата ***B***, която се определя чрез (17.21) с помощта на координатите на възлите на елемента - формули (17.8).

Понякога деформациите в тялото могат да са предизвикани от температурни изменения. Тогава деформациите в елемента ще наречем начални и в границите на елемента ще бъдат :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{z0} \\ \gamma_{xz,0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (17.22)$$

където α - коефициент на линейно температурно разширение на материала на елемента; *T*- температурна разлика. Температурната разлика се счита за положителна, когато температурата се повишава.

В) Напрежения

Записваме Закона на **Хук**, който за равнинно напрегнато състояние при наличие на температурни деформации има вида:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_z) + \alpha T \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x) + \alpha T \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \end{aligned} \qquad (17.23)$$

където E, G, μ са съответно модул на еластичност от първи род и втори род и коефициент на **Поасон** за материала на елемента.

Решавайки тези уравнения спрямо напреженията, получаваме:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_z) - \frac{E}{1-\mu^2}(1+\mu)\alpha T \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_z + \mu\varepsilon_x) - \frac{E}{1-\mu^2}(1+\mu)\alpha T \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xz} = \frac{E}{1-\mu^2}\frac{1-\mu}{2}\gamma_{xz} \end{aligned} \qquad (17.24)$$

Въвеждаме вектор на напрегнатото състояние σ на елемента:

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \qquad (17.25)$$

Тогава уравнения (17.24) могат да се запишат във вида:

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_e - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \qquad (17.26)$$

където

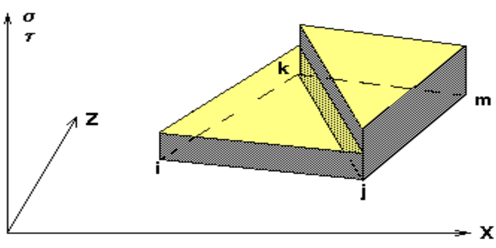
$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \qquad (17.27)$$

Като използуваме (17.19) за уравнение (17.26) следва:

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_e - \boldsymbol{\varepsilon}_0) = \boldsymbol{D\varepsilon}_e - \boldsymbol{D\varepsilon}_0 = \boldsymbol{DB\delta}_e - \boldsymbol{D\varepsilon}_0 \qquad (17.28)$$

Последното уравнение показва, че и напреженията се определят чрез преместванията на прилежащите възли на елемента. Тъй като матриците ***D*** (17.21) и ***B*** (17.26) съдържат само константи, следва, че и напреженията в границите на елемента са константни величини. На фиг.17.17. е показано как биха изглеждали графиките на напреженията в два съседни елемента. Следователно в разглеждания случай функциите на формата отговарят и на третия критерий, формулиран по-горе.

Същевременно ще отбележим, че в едно напрегнато тяло като правило напреженията са винаги непрекъснати величини. Скокове от типа на тези, показани на фиг.17.4 са невъзможни. Методът на крайните елементи дава едно усредняване на напрежението в границите на елемента. Счита се, че това усредняване се отнася за центъра на тежестта на елемента. Колкото мрежата е по гъста, елементите ще са с по-малки размери и скоковете в напреженията между елементите ще бъдат по-малки.



Фиг.17.4. Разпределение на напреженията

Ако ни интересуват напреженията във възлите, се взема средната аритметична стойност на напреженията от всички елементи, които контактуват с дадения възел.

Забележка: В резултат от деформациите в равнината *XZ* в напречно направление гредостената също променя размерите си. За даден елемент изменението на дебелината h ще получим чрез израза:

$$\Delta h = h\varepsilon_y = -h\frac{1}{E}\mu\ (\sigma_x + \sigma_z)$$

Г) Еквивалентни възлови сили

Всеки елемент контактува с други елементи и така елементите си взаимодействат чрез възлите. Във всеки възел въвеждаме по две сили *Fx* и *Fz*, които ще считаме за положителни, когато са насочени по положителните оси *X* и *Z* - фиг.17.1. За даден елемент възловите сили обединяваме във вектора ***F***:

Тези сили са еквивалентен израз на натоварването на елемента - напреженията, които възникват в елемента и на обемните сили, на които елементът е подложен.

$$\boldsymbol{F}_e = \begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{z,i} \\ F_{x,j} \\ F_{z,j} \\ F_{x,k} \\ F_{z,k} \end{Bmatrix} \qquad (17.29)$$

Д) Връзка между възловите премествания и възловите сили. Матрица на коравина на елемента.

За да определим връзката между преместванията на прилежащите възли на елемента и еквивалентните възлови сили ще използуваме принципа на виртуалните премествания, съгласно който тялото е в равновесие, ако виртуалната работа на външните сили е равна на виртуалната работа на вътрешните сили.

За изолиран от областта елемент външни сили са възловите сили и обемните сили, действуващи върху елемента, а вътрешни сили са напреженията, действуващи в елемента, откъдето съгласно принципа на виртуалните премествания, имаме:

$$A_F + A_Q = A_\sigma \qquad (17.30)$$

където: A_F - виртуална работа на възловите сили , A_Q - виртуална работа на обемните сили и A_σ - виртуална работа на напреженията.

За да изчислим виртуалните работи, задаваме виртуални премествания на възлите (виртуалните величини по-долу са индексирани със *), от което ще получим виртуални деформации по целия елемент, които съгласно (17.19) са:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}_e^* \tag{17.31}$$

Работата за единица обем , която напреженията ще извършат, ще бъде:

$$\boldsymbol{A}_\sigma^0 = (\boldsymbol{\varepsilon}_e^*)^T \boldsymbol{\sigma}_e = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}_e^*)^T \boldsymbol{\sigma}_e = (\boldsymbol{\delta}_e^*)^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\sigma}_e \tag{17.32}$$

Забележка: Тук се използва правилото за транспониране на произведение от матрици, че $\boldsymbol{(AB)^T=B^TA^T}$.

Работата от напреженията по целия елемент ще получим след интегриране на (17.32) по целия обем на елемента :

$$\boldsymbol{A}_\sigma = (\boldsymbol{\delta}_e^*)^T \int \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\sigma}_e \, d(vol) \tag{17.33}$$

Работата за единица обем, която обемните сили, действуващи на елемента извършват, ще бъде:

$$A_Q^0 = (\boldsymbol{f}^*)^T . \boldsymbol{Q} \tag{17.34}$$

където $\boldsymbol{Q}$ - вектор на компонентите на обемните сили, действуващи на единица обем върху елемента:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_z \end{Bmatrix} \tag{17.35}$$

Като вземем предвид (17.10), за зависимост (17.34) получаваме:

$$A_Q^0 = (\boldsymbol{N}\boldsymbol{d}_e^*)^T \boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\delta}_e^*)^T \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{Q} \tag{17.36}$$

За работата на обемните сили по целия елемент интегрираме (17.36) по обема;

$$A_Q = (\boldsymbol{\delta}_e^*)^T \int \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{Q} \, d(vol) \tag{17.37}$$

Работата от възловите сили на елемента ще бъде:

$$A_F = \{\boldsymbol{\delta}_e^*\}^T \boldsymbol{F}_e \tag{17.38}$$

След заместване на (17.33), (17.37) и (17.38) в (17.30), след опростяване, получаваме:

$$\boldsymbol{F}_e = \int \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\sigma}_e \, d(vol) - \int \boldsymbol{N}^T Q \, d(vol) \tag{17.39}$$

След използване на (17.28), за възловите сили получаваме:

$$\boldsymbol{F}_e = [\int \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{B} d(vol)]\boldsymbol{\delta}_e - \int \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 d(vol) - \int \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{Q} d(vol) \tag{17.40}$$

Уравнение (17.40) е важна зависимост в метода на крайните елементи. Отделните съставки в дясната част изразяват приносът към възловите сили. Уравнението може да се запише още във вида:

$$\boldsymbol{F_e} = \boldsymbol{C_e}\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{e}} - \boldsymbol{F}_{\varepsilon,e} - \boldsymbol{F_Q} \qquad (17.41)$$

където

$$\boldsymbol{C}_e = \int \boldsymbol{B^T D B}\, d(vol) \qquad (17.42)$$

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \int \boldsymbol{B^T D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 d(vol) \qquad (17.43)$$

$$\boldsymbol{F}_Q = \int \boldsymbol{N^T Q} d(vol) \qquad .44)$$

След извършване на необходимите действия съгласно (17.42), за $\boldsymbol{C}$ се получава квадратна матрица от шести ред, която се нарича **матрица на коравина на елемента**. Тя е напълно определена, тъй като матриците $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ са известни (виж (17.21) и (17.26)). Уравнения (17.30)..(17.40) са общи за метода на крайните елементи, тъй като при тяхното извеждане не бяха използвани някакви ограничения.

В случая, който разглеждаме, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ са константи и при малки размери на елемента $d(vol) = \Delta h$, където h е дебелината на елемента, за матрицата на коравина $\boldsymbol{C}$ на елемента получаваме:

$$\boldsymbol{C}_e = \boldsymbol{B^T D B}.h\Delta \qquad (17.45)$$

Матрицата на коравина на елемента, определена по този начин, се получава симетрична.

Ако се използва поблоково записване на матрицата $\boldsymbol{B}$ - (17.21) във вида:

$$\boldsymbol{B} = \lfloor \boldsymbol{B_i} \quad \boldsymbol{B_j} \quad \boldsymbol{B_k} \rfloor \qquad (17.46)$$

където

$$\boldsymbol{B_i} = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \qquad (17.47)$$

тогава $\boldsymbol{C}$ може да се запише във вида:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{ii} & c_{ij} & c_{ik} \\ c_{ji} & c_{jj} & c_{jk} \\ c_{ki} & c_{kj} & c_{kk} \end{bmatrix} \qquad (17.48)$$

където $\boldsymbol{C}_{rs}$ са квадратни подматрици с размери 2x2 , които се пресмятат по израза:

$$\boldsymbol{c}_{rs} = (\boldsymbol{B}_r)^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_s h\Delta \tag{17.49}$$

Е) Асемблиране. Глобална матрица на коравина.

До тук разгледахме един елемент и определихме връзката на възловите сили на елемента чрез възловите му премествания и натоварване - уравнение 17.41. Тъй като тялото е дискретизирано с множество крайни елементи, в даден възел всички възлови сили ще се сумират. За да бъде възелът в равновесие, тази сума трябва да е равна на действуващата във възела външна сила (или равна на нула, ако възелът е свободен), т.е., за възел j ще получим:

$$\sum_{r=1..m} (\boldsymbol{F}_e)_r = \sum_{r=1..m} (\boldsymbol{C}_e\boldsymbol{\delta}_e - \boldsymbol{F}_\varepsilon - \boldsymbol{F}_Q)_r = \boldsymbol{P}_j \tag{17.50}$$

където m - общ брой на елементите, контактуващи в разглеждания възел j, $\boldsymbol{P}_j$- вектор на външните съсредоточени сили във възел j.

Структурата на уравнение (17.50), записано само за един елемент с прилежащи възли i,j,k , които не са последователни числа (почти винаги), за цялата дискретизационна област ще има вида:

$$\begin{bmatrix} .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & c_{ii} & .. & c_{ij} & .. & c_{ik} & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & c_{ji} & .. & c_{jj} & .. & c_{cjk} & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & c_{ki} & .. & c_{kj} & .. & c_{kk} & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} .. \\ \delta_i \\ .. \\ \delta_j \\ .. \\ \delta_k \\ .. \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} .. \\ P_i + F_{\varepsilon,i} + F_{Q,i} \\ .. \\ P_j + F_{\varepsilon,j} + F_{Q,k} \\ .. \\ P_k + F_{\varepsilon,k} + F_{Q,k} \\ .. \end{Bmatrix} \tag{17.51}$$

Когато сумирането се извърши за всички елементи, уравнение (17.51) ще има вида:

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{F} \tag{17.52}$$

където $\boldsymbol{C}$ се нарича **глобална матрица на коравина** (с размери $2n$ X $2n$, където n - общ брой на възлите), $\boldsymbol{\delta}$ **- глобален вектор на неизвестните премествания**, $\boldsymbol{F}$ **- глобален вектор на натоварването**. Глобалната матрица на коравина $\boldsymbol{C}$ е също симетрична и при формирането и е достатъчно да се определят само членовете и, стоящи на и над главния диагонал.

Ж) Определяне на натоварването

По-горе бяха определени товарните вектори на елемента в общ вид. Сега ще определим по-конкретно техните елементи.

ж.1) Случай на съсредоточени във възлите сили

В този случай компонентите на възловите сили са точно равни на компонентите на външните сили по осите X и Z.

ж.2) Случай на температурно натоварване

Възловите сили се пресмятат съгласно (17.43). След извършване на интегрирането получаваме:

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \frac{Eh\alpha T}{2(1-\mu)}\begin{Bmatrix} z_j - z_k \\ x_k - x_j \\ z_k - z_i \\ x_i - x_k \\ z_i - z_j \\ x_j - x_i \end{Bmatrix} \tag{17.53}$$

ж.3) Случай на обемни сили

Възловите сили се определят съгласно (17.44). Тъй като сега под интеграла стоят функции на координатите x и y (функциите на формата), интегрирането се усложнява. Ако обаче приемем, че поради малкия размер на елементите обемните сили са постоянни в границите на елемента, от физически съображения тези сили ще се разпределят по равно между възлите Така например при отчитане на гравитационните сили, които действуват по ос Z, ще имаме:

$$\boldsymbol{F}_Q = -\frac{\gamma\,\Delta\,h}{3}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{17.54}$$

където γ -обемно тегло на материала на елемента. Знакът минус произтича от факта, че гравитационните сили действуват против положителната посока на ос Z. Същият резултат се получава и при точното интегриране на (17.44).

По подобен начин могат да се определят възловите сили при центробежно силово поле или при електромагнитно силово поле.

ж.4) Случай на натоварване по страните на елемента

В този случай най-лесно е натоварването по границите на елемента да се приведат към еквивалентни възлови сили в съответствие с правилата на статиката.

И) Отчитане на граничните условия на закрепване

Условията на закрепване се отчитат, като така построената глобална матрица на коравина и глобален товарен вектор 17.48 се преработят според закрепването. Разбира се могат да се анулират определени премествания само по направление X или Z, тъй като неизвестните са в тези направления. Могат да се зададат предварителни премествания по осите X и Z на закрепените възли.

К) Обобщение. Обща схема на приложение на МКЕ

От изложеното могат да се откроят следните по-важни стъпки при решението на една задача по метода на крайните елементи:

k.1). Дискретизация на областта. Препроцесор.

На този първи етап цялата област на разглежданото тяло се разделя на определен брой крайни елементи. Разделянето може да стане ръчно или автоматично. Всички известни програмни продукти (днес се наброяват десетки такива) позволяват автоматично генериране на мрежата от крайни елементи. Това е особено важно, тъй като за постигане на удовлетворителен резултат понякога е необходима мрежа от хиляди крайни елементи. В резултат от дискретизацията се създават следните масиви с входни данни:

- координати на възлите, номерирани произволно
- разположение на елементите, номерирани произволно
- закрепване на възлите
- дебелини и материали на елементите
- натоварване на елементите и възлите

Етапа на създаване на входните данни е изключително важен. Програмата, която извършва това и създава файла с входни данни, се нарича **препроцесор**.

k.2) Процесор.

На базата на създадените входни данни се генерира системата алгебрични уравнения (17.52), като приносът на всеки елемент се извършва по схемата, дадена в (17.51).

След генериране на системата алгебрични уравнения същата се преработва по такъв начин, че да се удовлетворят граничите условия на закрепване на разглежданото тяло, след което системата се решава. Опитът показва, че етапът на решение на системата алгебрични уравнения изисква най-много процесорно време, обикновено 80-85 % от общото време за решаване на задачата.

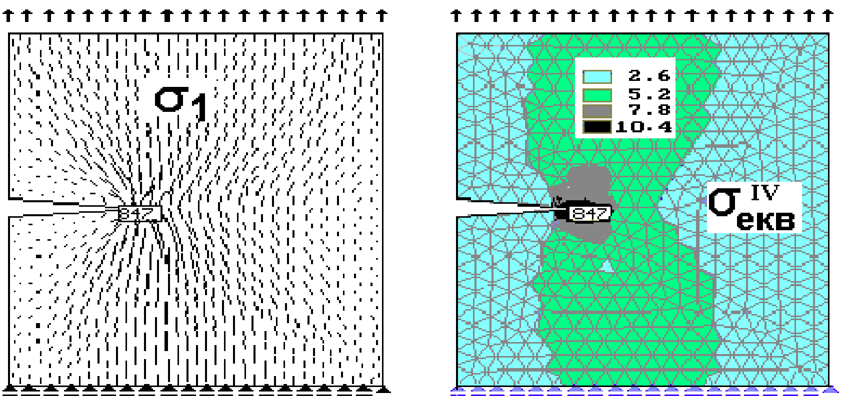
След определяне на преместванията, се определят напреженията за всеки елемент, като се използва уравнение (17.28).

Всички получени резултати се записват на диска в съответни файлове.

k.3). Постпроцесор.

На този етап се извършва разглеждане на получените резултати с помощта на програма, която се нарича **постпроцесор**. Файловете с изходни резултати съдържат толкова много информация, че практически е невъзможно да се анализира даже проста задача без наличието на постпроцесор. Обикновено постпроцесорът дава възможност за графическо визуализиране на мрежата, деформираното състояние за отделните товарни случаи и произволни комбинации от тях, визуализиране полето на напреженията, главните напрежения, еквивалентните напрежения, анимация и др.

Л) Пример 17.1. На фиг.17.5 е показана пластина (с размери *b/h=95/105*, дебелина *1 mm*) с пукнатина, подложена на опън с напрежение *0,2 MPa*. Изчислението на напрегнатото и деформирано състояние е извършено с продукта СДАН – [17]. Пластината е разделена на 959 триъгълни елемента, свързани в 526 възела (Генерирането на мрежата е извършено автоматично). Показано е разпределението на първото главно напрежение и на еквивалентното напрежение по четвърта якостна хипотеза. Големината на чертичките на фиг.17.5-а показват графично големината на първото главно напрежение, а направлението им – направлението на действие на това напрежение. От тази фигура ясно се виждат траекториите на напрежението σ_1. Максималното опъново напрежение в центъра на тежестта на елемент 847 е изчислено *11,4 MPa*, което е 57 пъти по-голямо от напрежението без пукнатина. Четирите зони на сивота на еквивалентното напрежение на фиг. 17.5-б показват най-големите стойности на това напрежение, дадени в легендата за всяка зона.



а) ***б)***

Фиг. 17.5. Траектории на първото главно напрежение и разпределение на еквивалентното напрежение

Гл. 18. РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ НА СЪПРОТИВЛЕНИЕ НА МАТЕРИАЛИТЕ С КОМПЮТЪРНИ МЕТОДИ.

18.1. Теоретична основа и характеристика на пакета СДАН

В предидущите глави беше изложена теорията на аналитичните методи за решение на задачите на Съпротивление на материалите. Бяха дадени основните хипотези, закони, определения и методи, без знанието на които е немислимо използването на съвременните компютърни методи за анализ.

Използвайки приложеният софтуер, читателят ще се убеди, че численото решение на задачите на Съпротивление на материалите, което през последните две-три десетилетия навлезе масово в учебния процес в университетите (да не говорим за практиката), превръща тази наука от един уморителен, изискващ много знания и умение труд, в един създаващ удоволствие труд, предлагащ бързи, многовариантни и точни решения. Но отново ще подчертаем, че без знание на основите на Съпротивление на материалите, без творческото участие на човека, използването и на най-модерния софтуер е абсурдно.

Предложеният софтуер е част от системата **СДАН** (Статични и Динамични АНализи) със силно ограничение на включените проблеми и максимален брой елементи до 20, докато пълната версия на продукта позволява анализиране на конструкции до 9999 елемента. Разработката на пакета под операционната система Windows е извършена от инж. Радослав Арсенов в сътрудничество с автора.

Софтуерът може да бъде показан само с числени примери. Някои от числените примери в тази глава повтарят примерите от аналитичните решения. Целта е да се направи сравнение за точността на решение, поради което тези примери са не особено сложни. Но веднъж усвоен начина на работа, с предлагания софтуер могат да се решават и много по-сложни задачи, немислими за аналитично решение. В компакт диска към книгата можете да намерите много други примери, непоказани тук.

А) Теоретична основа

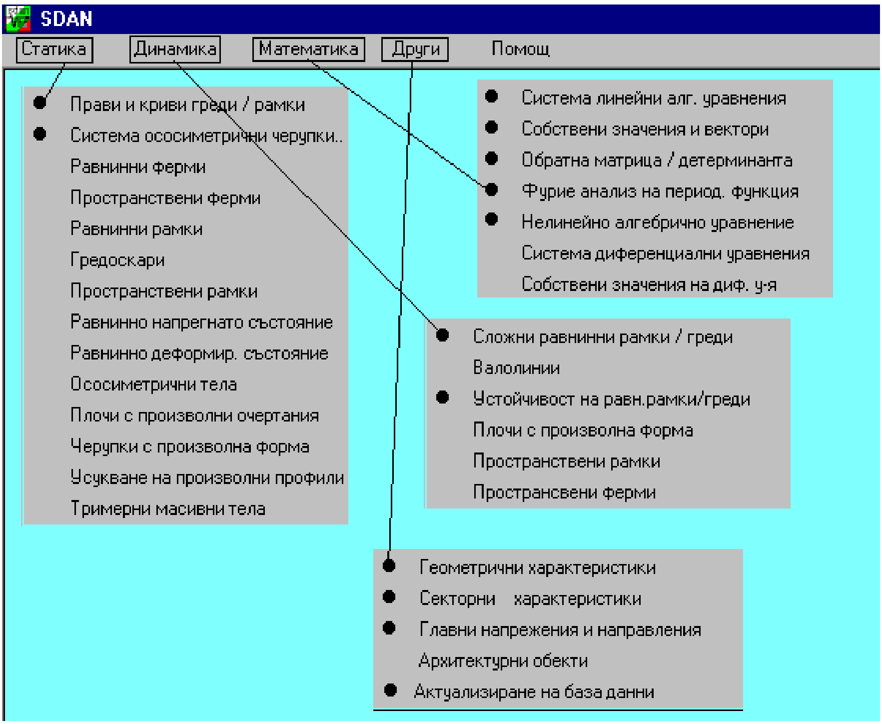
Понастоящем са разработени редица числени методи за решение на задачите на Съпротивление на материалите. Три от тях (пряк метод, деформационнен метод и метод на крайните елементи) са подробно изложени в монографията [18]. Идеята на метода на крайните елементи беше изложена в гл.18.

Както вече видяхме в предидущите раздели, проблемът за определяне на вътрешните усилия, премествания и напрежения в греди, рамки, ферми, ососиметрични плочи и черупки при статично и динамично натоварване или при загуба на устойчивост се свежда до решаването на системи обикновени линейни диференциални уравнения, подчинени на известни гранични условия. Доколкото теорията на решението на тези системи ДУ е добре изучена, то тя може да послужи за база при решението на посочените проблеми. Подробно това е направено в [18]. В табл.18.1 са показани използуваните уравнения за съответните проблеми и разделите на учебника, където са получени.

Табл.18.1

Проблем	Използувани диференциални и други уравнения	Виж раздел:
1.Вътрешни усилия и премествания в греди и рамки с права ос.	$\frac{d^4W}{dx^4} = \frac{q}{EJ_y}$ $\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{t}{EF}$	7.3 3.2
2.Вътрешни усилия и премествания в греди и рамки с крива ос.	$\frac{d^6U}{d\varphi^6} + 2\frac{d^4U}{d\varphi^4} + \frac{d^2U}{d\varphi^2} = \frac{R^4}{EJ_y}\left(\frac{dq}{d\varphi} - t\right)$	Виж [16]
3.Вътрешни усилия и премествания в греди и рамки с права ос, лежащи на еластична основа.	$\frac{d^4W}{dx^4} + cW = \frac{q}{EJ_y}$	7.5
4.Вътрешни усилия и премествания в цилиндрични черупки и кръгли плочи.	$\frac{d^4W}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2D}W = \frac{p}{D} - \mu\frac{N}{RD}$ $\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\theta\ r)\right] = -\frac{Q}{D}$ $\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(Ur)\right] = 0$	13.2 13.3 12.1
5.Устойчивост на греди и рамки с права ос.	$\frac{d^4W}{dx^4} + \frac{P}{EJ_y}\frac{d^2W}{dx^2} = 0$	11.2

6.Трептения на греди и рамки с права и крива оси.	$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho F}{EJ_y}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$	16.3
7. Геометрични и секторни характеристики на равнинни фигури.	Апроксимация на фигурата като сума от триъгълници, правоъгълници и сектори	2.1, 2.2, 2.3
8.Определяне на главни напрежения и направления при тримерно напрегнато състояние.	$$(T_\sigma - \sigma I)X = 0$$ $$\det(T_\sigma - \sigma I) = 0$$	4.3.

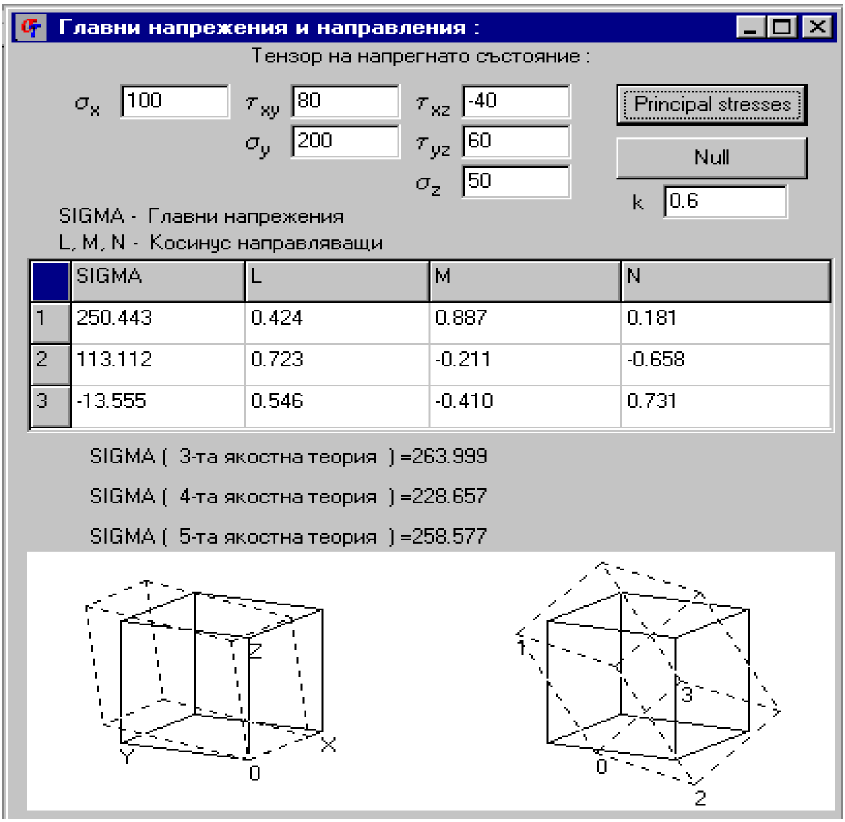


Фиг.18.1. Главно меню на пакета СДАН

Б) Главно меню на пакета СДАН

След стартиране на системата се появява **главното меню** – фиг. 18.1. То съдържа 4 области: ‘**Статика**’, ‘**Динамика**’, ‘**Математика**’ и ‘**Други**’. Активните проблеми за всяка област в учебната версия на продукта са маркирани със символа ’●’. Полето на приложение на разработения софтуер може да се прочете от **Help-**системата на пакета (на някои места контекстно чувствителна), която може да се активира по всяко време (щракнете с мишката върху ‘**Помощ**’ или натиснете клавиш **F1**).

18. Определяне на главни напрежения и направления



Фиг.18.2. Определяне на главни напрежения и направления

Пример 18.1. Да се определят главните напрежения и направления и еквивалентните напрежения по трета, четвърта и пета якостни теории за точка, в която тензорът на напрегнатото състояние има вида:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 100 & 80 & -40 \\ & 200 & 60 \\ Sym & & 50 \end{bmatrix} \quad [MPa]$$

Аналитичното решение на този проблем е описано в раздел 4.3. При пълен тензор на напрегнатото състояние (какъвто е в случая) задачата се усложнява извънредно много.

Програмата за числено решение на проблема се стартира от раздел 'Други'- фиг.18.1. Тя работи в диалогов режим, показан на фиг.18.2. Както се вижда от фигурата, тензорът на напрегнатото състояние са задава в шестте маркирани полета (в произволна измерителна система). С бутона

се изчисляват главните напрежения и направления. Изчислените стойности за тях се извеждат в таблица. Изчисляват се и еквивалентните напрежения по 3-та, 4-та и 5-та якостни теории. Коефициентът ***К***, необходим за пета якостна теория (виж раздел 5.3), се въвежда в полето ***'К'***. В отделно графично поле са показани деформираното кубче в първоначалната координатна система *XYZ* и в системата на главните направления *123*.

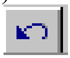
С бутона

се нулира тензора на напрегнатото състояние, след което се задава нов тензор.

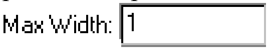
18.3. Определяне на геометрични и секторни характеристики на равнинни фигури

А) Определяне на геометрични характеристики

Програмата се стартира от раздел 'Други' – фиг.18.1. Програмата работи в диалогов режим, изобразен на фиг.18.3.

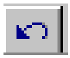
Идеята на алгоритъма е сложната фигура, каквато и да е, да се представи като сума и разлика на три елементарни фигури – произволен четириъгълник, произволен триъгълник и сектор с ъгъл в диапазона 0-180 градуса. С тези 3 елемента може да се представи достатъчно точно всяка фигура. Входните данни представляват координатите на елементите, от които се състои фигурата и се въвеждат чрез избор с мишката. За по-бързото въвеждане могат да се използуват 'водачи', които се избират чрез мишката така: ако искаме да поставим хоризонтална линия като 'водач' с вертикална координата 50 мм, натискаме левия бутон на мишката в полето на хоризонталната линийка и влачим до вертикалната отметка 50 мм. По подобен начин се поставя вертикален водач. Пресечните точки на водачите са възможни възли на фигурата, които стават действителни, когато се щракне с мишката върху тях. Координатите на всеки възел се изобразява в полето за координатите на възлите и може да бъде ръчно коригиран (след корекцията на дадена координата, натиснете Enter). Всеки водач може да бъде преместен, ако преди това е активиран бутона 

Видно от фиг.18.3, с помощта на инструмента 

може да се избере дименсията, в която ще се работи – **mm, cm, m**. За мащабиране на екрана се въвежда и максималния размер на фигурата в полето 

.

Фигурите, които ще се въвеждат, се избират с бутоните  - произволен четириъгълник, произволен триъгълник или сектор. Ако фигурата се добавя, се избират запълнени фигури, ако се изважда, избират се незапълнени фигури. Естествено, изваждането на фигура има смисъл да се извършва само от добавена преди това фигура (фигури).

Всяка една въведена фигура (добавена или извадена) може да бъде изтрита, като се мине в режим 'изтриване' с бутона , след което се щракне с левия бутон върху желаната фигура и се натисне клавиша '**Del**'. Последната фигура може да се изтрие с бутона .

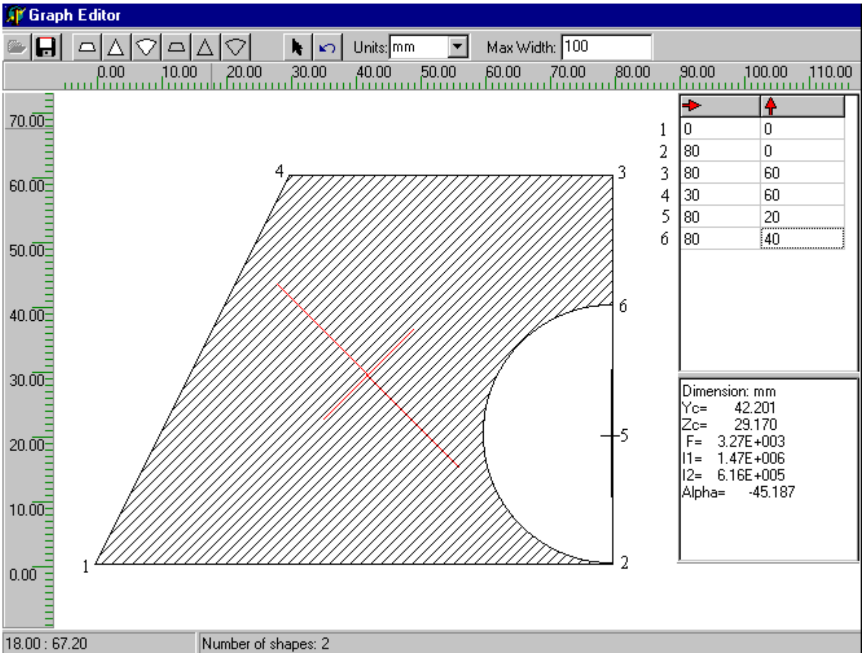
След въвеждането (или изтриването) на всяка поредна фигура, резултатите за резултиращата върху екрана фигура се изобразяват в числен и графичен вид в полето за резултати. Изчисляват се положението на центъра на тежестта, положението на главните оси на инерция, площта и главните инерционни моменти на резултиращата фигура.

Пример 18.2. Да се определят положението на главните инерционни оси и значенията на главните инерционни моменти за фигурата от пример 2.1, решен аналитично.

Решението е показано на фиг.18.3. Фигурата е съставена, като от четириъгълника 1,2,3,4 е изваден сектора 5,6,2 по начина, описан по-горе. Вижда се, че резултатите от аналитичното и численото решение съвпадат. Безспорно решението на разгледаната задача с предложената програма е несравнимо по-леко и което е по-важно – грешките при решението са сведени до нула.

Всяко въведено сечение може да бъде записано във файл и разпечатано на принтер, а записаните сечения могат да се прочетат, като се използуват конвенционалните бутони за запис, печат и четене.

Решението с компютър може да се използува и при сечения, съставени от стандартни профили.



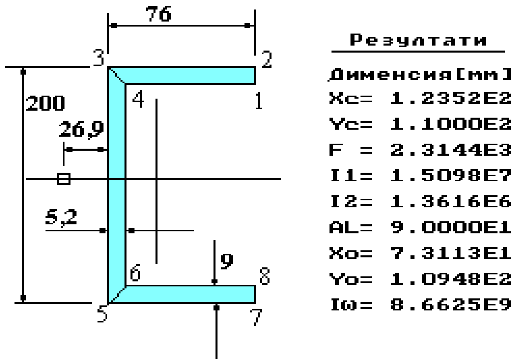
Фиг.18.3. Определяне на геометрични характеристики

Б) Определяне на секторни характеристики

Програмата се активира от раздел ‘Други’ – фиг.18.1. Тя работи подобно на програмата за определяне на геометрични характеристики. Видът на екрана е същия, като показания на фиг.18.3. Различието се състои в това, че тънкостенния профил се апроксимира само с четириъгълници, които при профили от праволинейни участъци са дълги и тесни. Ако профилът е с криволинеен контур, същият следва да се апроксимира също с произволни четириъгълници.

Резултатите от изчислението са освен геометричните характеристики на профила, така и центъра на огъване и главния секторен инерционен момент.

Пример 18.3. Да се определи положението на центъра на огъване и секторния инерционен момент за П-образен профил N20, решен аналитично в пример 2.2 – гл.2.



Фиг.18.4. Определяне на секторни характеристики

Профилът може да се състави от три дълги и тесни четириъгълника с известни размери – фиг.18.4, където са показани само резултатите от изчислението. Четириъгълниците се задават в следния ред на възли: Първият -1,2,3,4, вторият – 4,3,5,6, третият – 6,5,7,8, при което последните два възела на всеки четириъгълник е първи и втори на следващия четириъгълник.

От сравнението на аналитичното решение и численото решение се вижда, че има незначителна разлика. Причината за това е, че при аналитичното решение геометричните характеристики са взети от таблиците за стандартни профили [8].

18.4. Статичен анализ на греди и рамки

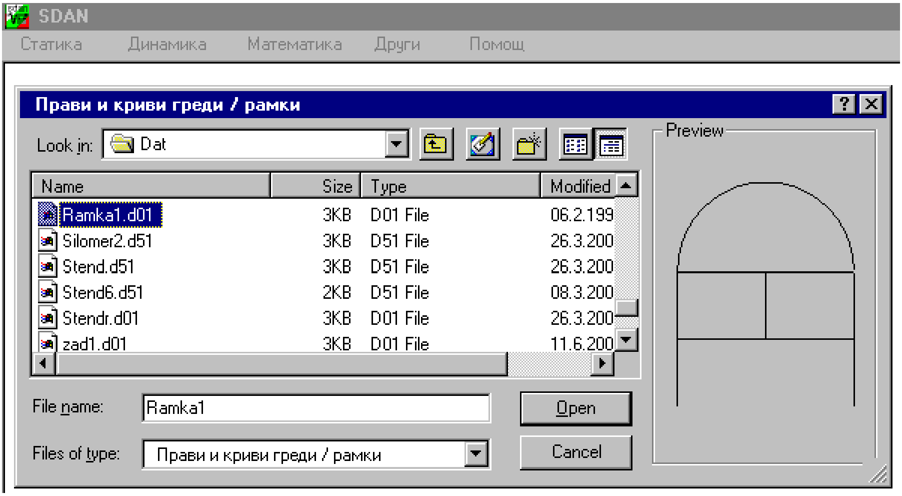
А) Отваряне на файл

Програмата се стартира от раздел ‘**Статика**’ на главното меню – фиг.18.1, проблем ‘**Прави греди и рамки**’, след което се активира диалогов прозорец за отваряне на файл – фиг.18.5.

Ако създавате нов файл, в полето ‘**File name**’ написвате името на файла, който предстои да създадете. След натискане на бутона ‘**Open**’, влизате в редактора за данни, прозореца на който е показан на фиг.18.6.

За да се видят резултатите за създаден преди това файл (или да продължите работа с незавършен файл), посочете с мишката името на този файл от списъка с файлове и щракнете с левия бутон. В случай, че файлът съществува и не съдържа грешки, в полето '**Preview**' ще видите картината на въведената преди това конструкция. След натискане на бутона '**Open**', влизате в редактора за данни.

Диалоговият прозорец 'Open' от фиг.8.15 е разширен диалогов прозорец на 'Windows' и чрез него могат да се извършват всички предвидени от операционната система операции.



Фиг.18.5. Диалогов прозорец 'Отваряне на файл'

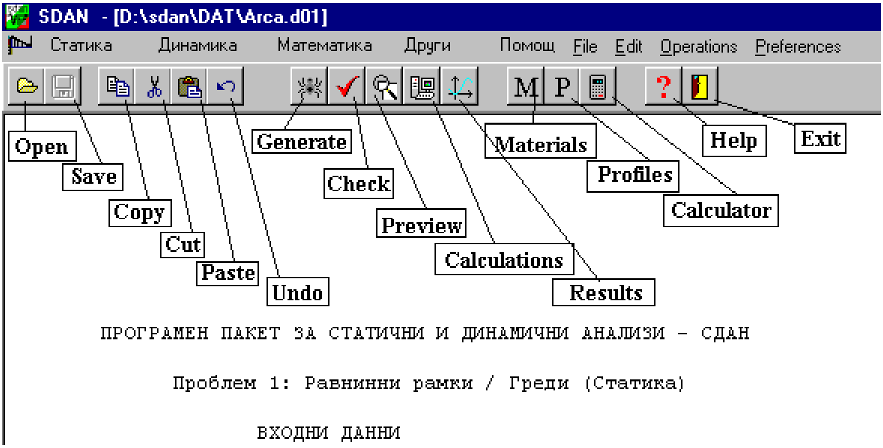
Трябва да се знае, че по подразбиране всички файлове с данни се намират в директория **\SDAN\DAT**, която се създава при инсталирането на пакета. Ако искате да прочетете или запишете файл от/в друга директория, изберете тази директория с инструментите на прозореца 'Open'. Тя остава активна докато не я смените.

Б) Редактиране на файл с текстов редактор

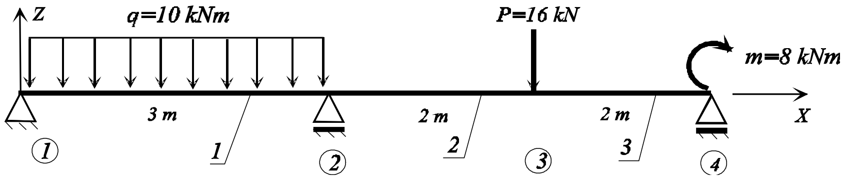
Ще разгледаме как се създава нов файл с данни с помощта на специално разработения за целта текстов редактор.

При влизането в редактора, се зареждат определен брой непопълнени таблици, които трябва да се попълнят. За по-голяма конкретност ще разгледаме следната задача:

Пример 18.4: За гредата, показана на фиг. 18.7 да се определят диаграмите на разрезните усилия *Qz* и *My*. Да се подбере необходимия двойно Т-образен профил на напречното сечение, след което да се определи напречното преместване на приложната точка на силата *P*. Материал – Ст.5 със $[\sigma]=160$ *MPa* и $[\tau]=100$ *MPa*.



Фиг.18.6. Препроцесор. Редактор за данни на пакета СДАН



Фиг.18.7.

Може да се види, че гредата е статически неопределена. За използвания алгоритъм на решение и разработения софтуер това няма никакво значение.

Номерираме възлите (1..4) и елементите (1..3). Приемаме глобална координатна система *XZ* (с произволно начало), в която се описват координатите на възлите и натоварването. Файлът с данни има вида:

ПРОГРАМЕН ПАКЕТ ЗА СТАТИЧНИ И ДИНАМИЧНИ АНАЛИЗИ - СДАН

```
             Проблем 1: Равнинни рамки / Греди (Статика)
                    ВХОДНИ ДАННИ
* ТАБ.1. КОНСТАНТИ (Z)
____________________________________________________________
_
#1   Име на задачата     [до 15 символа]      NAME =Греда
#2   Димензия за сили    [N,KN,MN,KG,T]       DIMF =KN
#3   Димензия за дължина [M,CM,MM]            DIML =M
#5   Общ брой на елементите     [1..3280]     NEL  =3
#6   Общ брой на възлите        [2..3280]     NOD  =4
```

```
#7   Общ брой на материалите    [1..50]       NMAT =1
#8   Общ брой на профилите      [1..50]       NPRO =1
#9   Общ брой на случ.на натов. [0..1]        NLD  =1
#10  Температурно натоварване   [0-не, 1-да]  ITEM =
#11  Собствено тегло            [0-не, 1-да]  IGRA =
#13  Предварителни премествания [0-не, 1-да]  IDIS =
#16  Коорд. с-ма [0-правоъг., 1-цилиндрична]  SYST =

* ТАБ.2. ДАННИ ЗА МАТЕРИАЛИТЕ (Z)
_____________________________________________________
 Ном.|Модул на|Коефиц.  |Относит.|Плътност|Коефиц.  |
 мат.| еласт. |Поасон   |тегло   |        |темп.раз|
  I  |   E    |  NU     | GAMA   |  RO    | ALFA   |
-----|--------|--------|--------|--------|--------|
#  1  2.13e+08    0.308 7.80e+01 7.95e+00 1.18e-05 ACT5

* ТАБ.3. ДАННИ ЗА ПРОФИЛИТЕ (Z)
______________________________________
 Ном.|    F   |   Iy'  |   Wy'  |IN |
-----|--------|--------|--------|---|
#1        1000    1          1

* ТАБ.4. ДАННИ ЗА ЕЛЕМЕНТИТЕ
_________________________________________________________________
 Елем|Междувъзлие   |Мат.|Проф|Тип |Радиус|Еласт.|Темп.  |Темп.  |
Височ.|
  I  | J1-J2        |MAT |PROF|TYPE|  R   |  C   |  T1   |  T2   |  H
|
-----|---R----------|-L--|--L-|--D-|--Z---|--Z---|--L---|--L---|--L-
#  1   1-2           1     1
#  2   2-3
#  3   3-4

* ТАБ.5. ДАННИ ЗА ВЪЗЛИТЕ
______________________________________________________
 Въз.| Коорд.  | Коорд.  |Код на|Прем.  |Прем.  |Завърт|
     |         |         |закр. |по X   |по Z   |ок. Y |
  J  |  X,r    |  Z,Ф°   | CODE |  U    |  W    |  Ty  |
-----|---R----|---R----|--D---|--Z---|--Z---|--Z---|
#  1   0         0         110
#  2   3         0         010
#  3   5         0
#  4   7         0         010

* ТАБ.6. СЪСРЕДОТОЧЕНИ СИЛИ И МОМЕНТИ ВЪВ ВЪЗЛИТЕ (L)
```

Въз. J	Px Случ.1	Pz Случ.1	My Случ.1
# 3		-16	
# 4		0	8

* ТАБ.8. РАЗПРЕДЕЛЕНИ СИЛИ ВЪРХУ ЕЛЕМЕНТИТЕ (L)

Елем I	qx1 Случ.1	qx2 Случ.1	qz1 Случ.1	qz2 Случ.1
#1			-10	-10

КРАЙ НА ВХОДНИТЕ ДАННИ

&

При попълването на тези данни могат да се използват конвенционалните инструменти **Copy, Cut, Paste, Undo** на редактора– фиг. 18.6. Другите инструменти от редактора ще коментираме по-долу. Макар, че таблиците са достатъчно ясни, описанието на всяка от променливите можете да прочетете от контекстно вградения HELP на пакета, част от който е даден също в раздел 18, приложение 1.

Ще обърнем внимание на някои особености при статичния анализ. Тук са възможни по принцип три вида задачи:

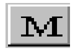
1. При дадени геометрия на конструкцията, включително и на напречните сечения, материал и външно натоварване, да се проверят максималните напрежения и деформации.

2. При дадени геометрия на конструкцията, материал, външно натоварване и допустими значения на напреженията и деформациите да се подберат сеченията на отделните елементи.

3. При дадени геометрия на конструкцията, включително и на напречните сечения, материал, допустими напрежения и деформации, да се определи допустимото натоварване.

Всички програмни пакети, в това число и СДАН, са пригодени за решение на първата задача.

В случая обаче имаме втората задача. Поради това, че не знаем данните за геометричните характеристики на напречното сечение, в табл.3 (профили) от данните сме приели Jy=1, F=1000. В гл. 10 видяхме, че разрезните усилия не зависят от значенията на инерционните моменти на сеченията, а от отношенията между инерционните моменти на отделните елементи (участъци). Що се отнася до площта F, въведеното число 1000 означава, че гредата е много корава на опън.

При избор на материали може да се използува инструмента 

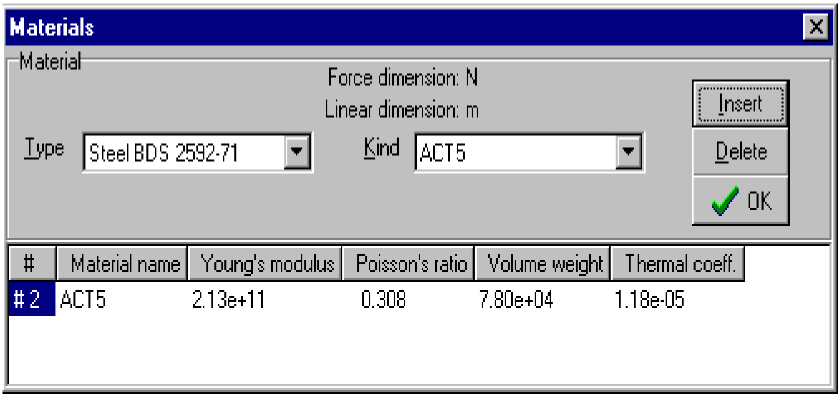
. Отваря се диалогов прозорец за избор на материали – фиг.18.8, от където с помощта на инструментите 

и 

може да се избере необходимия материал по вид и сорт съгласно БДС. След избора на даден материал, данните за него се вмъкват в полето за материали с бутона 

. След избора на всички желани материали, техните данни се вмъкват автоматично под таблица 2 с помощта на бутона 

.



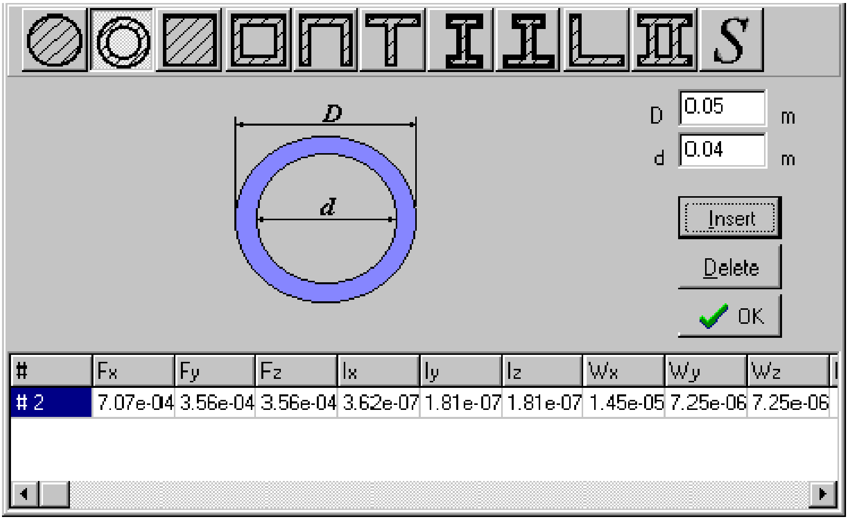
Фиг. 18.8. Диалогов прозорец за избор на материали

Ако напречните сечения на елементите са известни, тогава геометричните характеристики, необходими за табл.3, могат да се определят автоматично чрез инструмента 

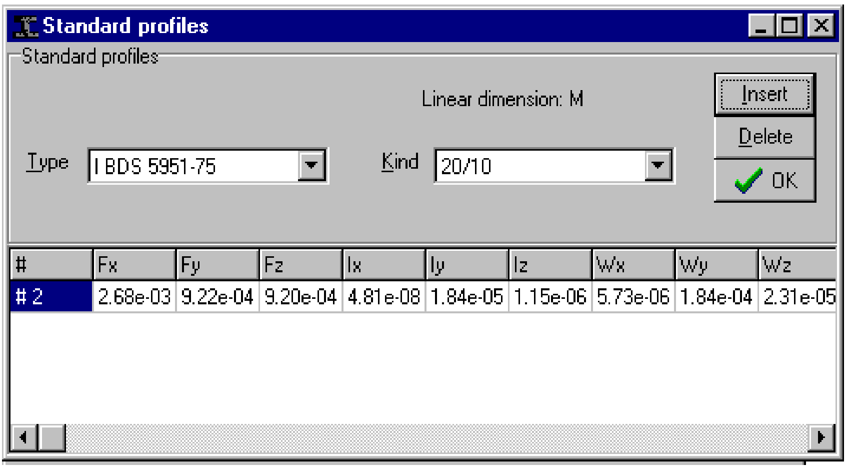
. Отваря се диалогов прозорец за избор на профили – фиг.18.9, откъдето могат да се изберат 10 по-често срещани профила. След задаване на размерите им, геометричните характеристики се изчисляват и се вмъкват под таблица 3 на данните автоматично подобно на начина, описан по-горе за материалите.

Ако в диалоговия прозорец за профили от фиг.18.9 изберете ***'S'***, ще се активира нов диалогов прозорец за избор на стандартни профили – фиг. 18.10. От него могат да се изберат вид на профила и сорт по съответен стандарт на БДС.

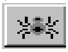
Забележка: Базата данни за стандартните материали и профили се съхраняват във файловете **Stdmat.dat** и **Stdprof.dat**, които се намират в директорията на пакета и могат да се актуализират (ако е необходимо) чрез средствата на текстовия редактор. За целта отворете тези файлове, като от главното меню – фиг.18.1 изберете от раздел ‘Други’ проблем ‘Актуализиране на база данни’.



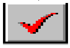
Фиг. 18.9. Диалогов прозорец за избор на профили



Фиг. 18.10. Диалогов прозорец за избор на стандартни профили

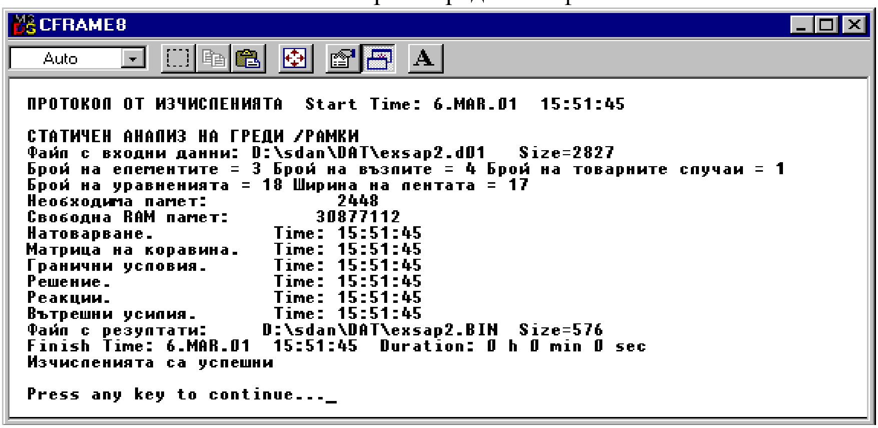
Пакетът СДАН позволява файлът с данни да се създаде и чрез графичен редактор, който се стартира с бутона  - фиг.18.6. В учебната версия по-целесъобразно е използването на текстовия редактор, показан по-горе, по две причини: по-полезен е за обучение; за малък брой елементи подготовката на файла с данни става по-бързо.

В) Проверка за грешки на файла с данни.

След като всички таблици са попълнени, наличието на евентуални грешки се проверява с бутона . Паралелно с това се извършва запис на файла в директорията за данни. Ако се открият грешки, те се съобщават в полето за съобщения на редактора (долу, в дясно на фиг.18.6), като същевременно курсорът застава на линията, съдържаща грешката. Естествено, след отстраняването на грешката, файлът се проверява отново за грешки със същия бутон. Това се повтаря докато в полето за съобщения не се получи съобщението: ‘**ОК. Не са открити грешки**’.

Г) Изчисления

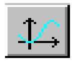
След като сте се убедили, че файлът с данни не съдържа повече грешки, можете да извършите изчисленията. Това става, като натиснете бутона за изчисление . Ще получите протокол от изчисленията – фиг. 18.11, където е показан протокола от изчисленията за файла с данни, показан по-горе за гредата на фиг.18.7.

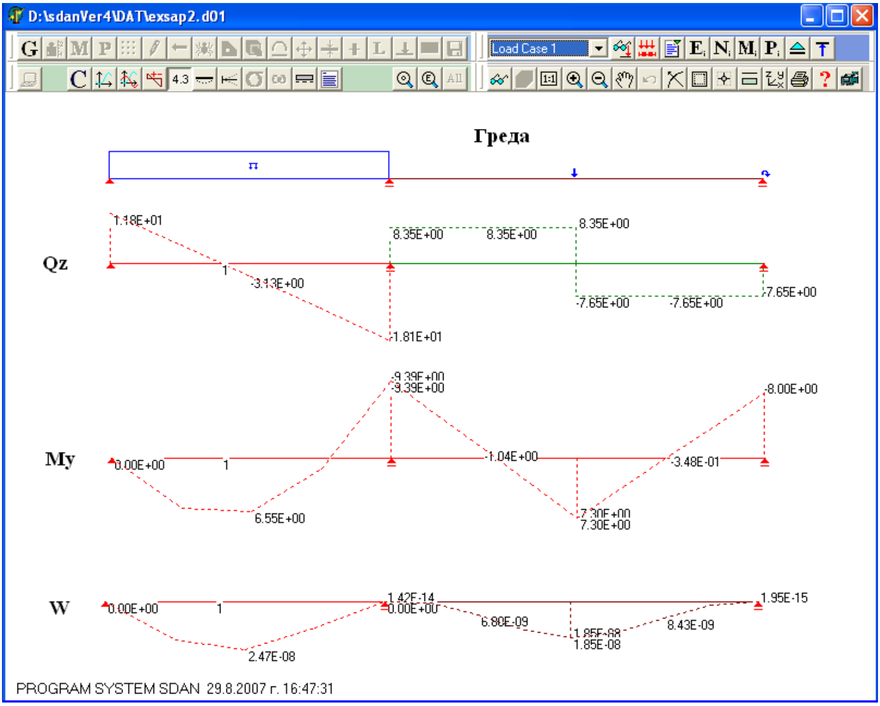


Фиг.18.11. Процевсор. Протокол от изчисленията.

Ако изчисленията са успешни, в края на протокола фигурира съобщението ‘***Изчисленията са успешни***’. Ако по време на изчисленията се получи срив по различни причини, в протокола ще бъде изписан типа на грешката.

В) Резултати

За да разгледате резултатите, натиснете бутона за резулатати  - фиг.18.6. Ще влезете в прозореца на ‘постпроцесора’, изобразен на фиг. 18.12, където са показани гредата и три от диаграмите: на срязващата сила ***Qz***, на огъващият момент – ***My*** и на напречното преместване – ***W*** за гредата от фиг.18.7.



Фиг.18.12. Постпроцесор. Резултати от изчисленията за примера от фиг.18.7.

Всички бутони от прозореца имат ‘подсказки’, така, че ориентирането е лесно. За да получите повече информация за действието на всеки бутон, натиснете бутона , след което щракнете върху интересуващият ви бутон. Освен това можете да видите последователността при решението на задачите, ако стартирате разработения за целта клип чрез натискане на бутона .

След влизане в постпроцесора, най-напред избирате товарния случай или задавате коефициентите на участие на различните товарни състояния чрез избор на комбинацията от товари, които видно от табл.1 на входните данни, могат да бъдат външни сили, собствено тегло, температурно натоварване и др. Коефициент нула игнорира съответното товарно състояние. Коефициент, различен от нула, умножава всички товари в това товарно състояние с този коефициент.

Най-общо, на етапа на разглеждане на данните могат да се видят диаграмите на разрезните усилия, на преместванията и завъртванията и на напреженията. Могат да се видят също опорните реакции, точността на изчисление и др. Графичните образи могат да се мащабират, транслират, ротират, анимират, печатат на принтер или графопостроител и др.

Графичният постпроцесор от фиг.18.12 има възможност и за графично задаване не данни, както и за графична корекция на стари данни. За целта натискате бутона  , след което извършвате необходимите действия чрез бутоните за графична редакция. Графичният редактор записва въведените данни в същия формат, както текстовия редактор.

Аналитичното решение на тази задача беше извършено с помощта на тримоментовото уравнение в пример. 10.4 Може да се види, че получените диаграми за разрезните усилия съвпадат изцяло.

Сега можем да завършим решението на задачата. Оразмеряването на гредата извършваме по максималния огъващ момент:

$$W_y \geq \frac{|M_{y,\max}|}{[\sigma]} = \frac{9,39.10^3}{160.10^6} = 58,7.10^{-6} \; m^3$$

От таблиците за двойно Т-образни профили избираме профил N 12 със следните данни: $Wy=58,4.10^{-6}\ m^3$, $Jy=350.10^{-8}\ m^4$, $Sy^*=33,7.10^{-6}\ m^3$, $d=4,8.10^{-3}\ m$. В действителност съпротивителният момент на избраната греда е по-малък с 0,5%, което се допуска.

Максималното тангенциално напрежение за гредата с избрания профил ще бъде:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_z S_y^*}{J_y d} = \frac{18,1.10^3.33,7.10^{-6}}{350.10^{-8}.4,8.10^{-3}} = 36\,MPa < [\tau]$$

Естествено, можем да определим и еквивалентното напрежение в застрашената точка сечението, за което разполагаме със всички данни

Диаграмата на еластичната линия *(W)* на фиг.18.12, съгласно входните данни, се отнася за инерционен момент *Jy=1*. За истинския инерционен момент на гредата *($Jy=350.10^{-8}$ m^4)*, получените данни за преместванията трябва да разделим с този инерционен момент, тъй като преместването зависи обратно пропорционално от него. Тогава преместването на приложната точка на силата *P* ще бъде:

$$W_{\max} = \frac{W(при\ Jy = 1)}{J_y(истинско)} = \frac{1{,}85.10^{-8}}{350.10^{-8}} = 5{,}286.10^{-3}\ m$$

Това преместване съвпада с аналитично полученото в пример 10.5.

Пример 18.5. Да се определят максималните напрежения и премествания за рамката с размери и натоварване, показана на фиг.18.13 – а. Профилите са дадени в таблицата с данни.

Тук имаме задача за анализ, тъй като напречните сечения на рамката и натоварването са известни. Тази рамка е значително по-трудна за аналитично решение, тъй като е три пъти статически неопределена, има кръгли участъци, разнообразни опори и връзки между елементите. Без коментар по-долу са приведени файла с данни и получените резултати за реакциите, разрезните усилия, преместванията и напреженията от вътрешната страна на рамката. Внимателно проследете попълването на таблиците с данни, като за неясните места се отнасяйте към указанията в раздел 18.5.

```
   ПРОГРАМЕН ПАКЕТ ЗА СТАТИЧНИ И ДИНАМИЧНИ АНАЛИЗИ - СДАН
             Проблем 1: Равнинни рамки / Греди (Статика)
                    ВХОДНИ ДАННИ

* ТАБ.1. КОНСТАНТИ (Z)
____________________________________________________________
#1   Име на задачата     [до 15 символа]      NAME =
#2   Дименсия за сили    [N,KN,MN,KG,T]       DIMF =KN
#3   Дименсия за дължина [M,CM,MM]            DIML =M
#5   Общ брой на елементите     [1..3280]     NEL  =5
#6   Общ брой на възлите        [2..3280]     NOD  =6
#7   Общ брой на материалите    [1..50]       NMAT =1
#8   Общ брой на профилите      [1..50]       NPRO =2
#9   Общ брой на случ.на натов. [0..1]        NLD  =1
#10  Температурно натоварване   [0-не, 1-да]  ITEM =
#11  Собствено тегло            [0-не, 1-да]  IGRA =
#13  Предварителни премествания [0-не, 1-да]  IDIS =
#16  Коорд. с-ма [0-правоъг., 1-цилиндрична]  SYST =

* ТАБ.2. ДАННИ ЗА МАТЕРИАЛИТЕ (Z)
```

```
_____________________________________________________
 Ном.|Модул на|Коефиц.  |Относит.|Плътност|Коефиц.  |
 мат.| еласт. |Поасон   |тегло    |        |темп.раз|
  I  |   E    |  NU     | GAMA    |  RO    | ALFA    |
-----|--------|--------|--------|--------|--------|
#  1  2.09e+08    0.291 7.80e+01 7.95e+00 1.15e-05 ACT6

* ТАБ.3. ДАННИ ЗА ПРОФИЛИТЕ (Z)
______________________________________
 Ном.|    F    |    Iy'  |    Wy'  |IN |
-----|--------|--------|--------|---|
#  1  3.60e-03 4.92e-06 9.84e-05   4
    Square pipe B=1.000e-01, H=1.000e-01, b=8.000e-02, h=8.000e-02
#  2  7.07e-04 3.98e-08 2.65e-06   1  O-Profile D=3.000e-02

* ТАБ.4. ДАННИ ЗА ЕЛЕМЕНТИТЕ
_____________________________________________________________________
 Елем|Междувъзлие    |Мат.|Проф|Тип |Радиус|Еласт.|Темп. |Темп. |
Височ.|
  I  | J1-J2         |MAT |PROF|TYPE|  R   |  C   |  T1  |  T2  |  H
|
-----|---R----------|-L--|--L-|--D-|--Z---|--Z---|--L---|--L---|--L-
#  1   1-3            1    2    B00
#  2   2-3                 1
#  3   3-4                      R11   1
#  4   4-5                      R11   1
#  5   5-6

* ТАБ.5. ДАННИ ЗА ВЪЗЛИТЕ
____________________________________________________
 Въз.| Коорд.  | Коорд.  |Код на|Прем.  |Прем.  |Завърт|
     |         |         |закр. |по X   |по Z   |ок. Y |
  J  |  X,r    |  Z,Φ°   | CODE |  U    |  W    |  Ty  |
-----|---R----|---R----|--D---|--Z---|--Z---|--Z---|
#  1   0         0         110
#  2   2         0         111
#  3   2         3
#  4   3         4
#  5   4         3
#  6   4         0         110

* ТАБ.6. СЪСРЕДОТОЧЕНИ СИЛИ И МОМЕНТИ ВЪВ ВЪЗЛИТЕ (L)
___________________________
 Въз.|  Px   |  Pz   |  My   |
     |_______|_______|_______|
```

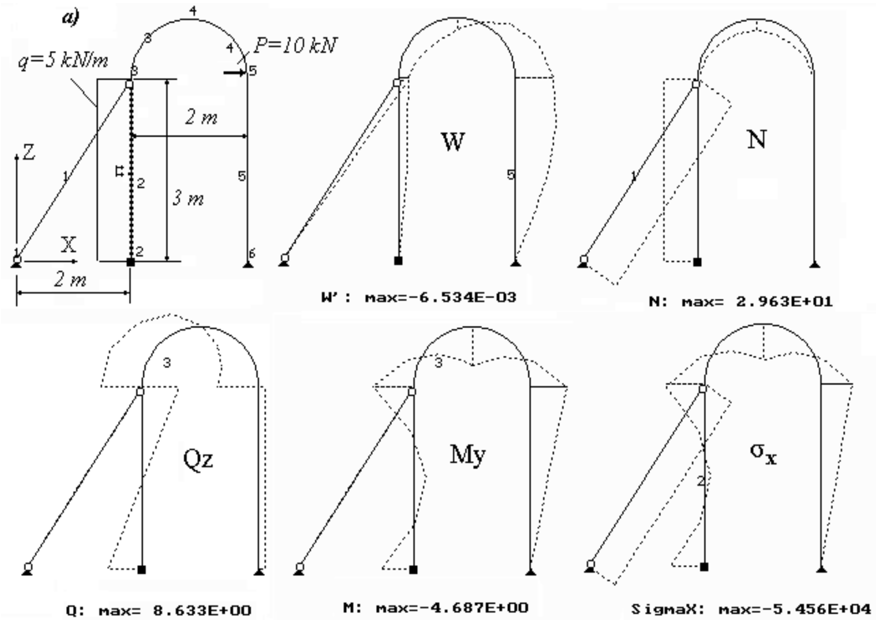
J	Случ.1	Случ.1	Случ.1
#5	10		

* ТАБ.8. РАЗПРЕДЕЛЕНИ СИЛИ ВЪРХУ ЕЛЕМЕНТИТЕ (L)

Елем	qx1	qx2	qz1	qz2
I	Случ.1	Случ.1	Случ.1	Случ.1
#2	5	5		

КРАЙ НА ВХОДНИТЕ ДАННИ

&



Фиг.18.13. Резултати от изчисленията

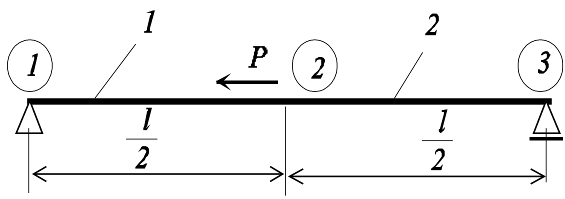
```
PROGRAM SYSTEM SDAN 9.MAR.01   9:39:35
HNK        File:ex185   Комбинация: LD1=1  [KN,M]  Слой:Долен
РЕАКЦИИ                                  [KN,M]

  J           Rx            Rz            My

  1   * -1.644E+01   -2.465E+01         0
  2   * -7.198E+00    2.495E+01   -3.780E+00
  6   * -1.367E+00   -2.927E-01   -2.384E-07
```

18.5. Устойчивост на греди и рамки

Този модул от пакета СДАН (фиг.18.1- раздел Динамика) позволява определяне на критичните товари на греди и равнинни рамки, статически определени или неопределени. Алгоритъмът на решение се основава на пряко решение на системата диференциални уравнения на устойчивостта от вида 11.18. Процедурата за подготовка на входните данни е следната:

Най-напред се определят участъците от гредата/рамката, които изпитват натиск. За прости греди и рамки това е елементарно, но ако натоварването е сложно, е нужен предварителен статичен анализ. Получените натискови сили се нанасят в табл.4 (по модул), колона ‘N’ (виж примера по-долу). Останалите данни в таблиците се попълват подобно на разгледаните вече примери. При стартиране на изчисленията е необходимо да се зададат две числа. Първото от тях представлява число, показващо колко пъти (ориентировъчно) да се увеличи зададения товар (10, 20, ... 100 или повече пъти), за да стане евентуално критичен. Второто число показва стъпката на изменението на увеличението (започва се винаги от нула). Програмата определя онова число – n_0 (или числа n_1, n_2, n_3... за всяка критична сила/товар), което превръща зададения товар в критичен, ако то действително съществува в зададения диапазон. Така дефинирано, решението n_0, получено с програмата, представлява коефициента на сигурност на гредата/рамката против загуба на устойчивост. Практически важен е само първият коефициент на сигурност, отнасящ се за първата критична сила. Ако това число е по-малко от единица, очевидно сигурност няма – конструкцията ще загуби устойчивост. Ако намереното число е по-голямо от единица, критичният товар ще бъде равен на n_0 пъти увеличен зададения товар.

Пример 18.6. Да се определи критичната сила за гредата, показана на фиг.18.14, ако *l=1 m* и коравината на огъване на гредата *EJy=const*.



Фиг.18.4

Гредата се състои от два участъка, свързани в три възела. Ще определим критичната сила за коравина на огъване *EJy=1*, поради което в таблиците за материали и профили (виж по-долу) ще зададем *E=1* и *Jy=1*. Критичната сила за произволна коравина ще получим, като умножим изчисления резултат с тази коравина *EJy* (или зададем истинската коравина). Тъй като в случая само първият участък (елемент) е натоварен на натиск, в колона ‘N’ на табл.4 за този участък ще нанесем 1, а за втория участък – 0. Тук предполагаме, че действуващата сила *P* е равна на единица. Програмата ще определи колко пъти ще трябва да се увеличи тази сила, за да стане тя критична.

При попълване на табл.6 във възел 2 задаваме действуващата сила по ос Y (в случая Py = -1). (*Забележка:* Тази сила се задава винаги във възел J2 на натиснатия елемент. В случая това е възел 2 на елемент 1. Силите на натиск, според модела на гредата/рамката, могат да бъдат и повече от една).

За да получим и формата на огъната ос на гредата/рамката е необходимо също в един произволен (незапънат) възел да зададем някакъв огъващ момент, например във възел 1 задаваме момент с големина единица.

Файлът са данни има вида:

```
      ПРОГРАМЕН ПАКЕТ ЗА СТАТИЧНИ И ДИНАМИЧНИ АНАЛИЗИ - СДАН
          Проблем 15: Равнинни рамки / Греди (Устойчивост)
                           ВХОДНИ ДАННИ

* ТАБ.1. КОНСТАНТИ (Z)
_____________________________________________________________
#1   Име на задачата     [до 15 символа]      NAME =
#2   Димeнсия за сили    [N,KN,MN,KG,T]       DIMF =N
#3   Димeнсия за дължина [M,CM,MM]            DIML =M
#5   Общ брой на елементите     [1..3840]     NEL  =2
#6   Общ брой на възлите        [2..3840]     NOD  =3
#7   Общ брой на материалите    [1..50]       NMAT =1
#8   Общ брой на профилите      [1..50]       NPRO =1
#9   Общ брой на случ.на натов. [0..1]        NLD  =1
#16  Коорд. с-ма [0-правоъг., 1-цилиндрична]  SYST =

* ТАБ.2. ДАННИ ЗА МАТЕРИАЛИТЕ (Z)
_______________________
 Ном.|Модул на|Коефиц. |
 мат.| еласт. |Поасон  |
  I  |   E    |  NU    |
-----|--------|--------|
#1        1       0.3

* ТАБ.3. ДАННИ ЗА ПРОФИЛИТЕ (Z)
________________________________
 Ном.|    F   |   Iy'  |   Wy'  |
-----|--------|--------|--------|
#1      1000     1        1
```

* ТАБ.4. ДАННИ ЗА ЕЛЕМЕНТИТЕ

Елем	Междувъзлие	Мат.	Проф	Тип	Сила
I	J1-J2	MAT	PROF	TYPE	N
-----	---R----------	-L--	--L-	--D-	--Z---
# 1	1-2	1	1		1
# 2	2-3				0

* ТАБ.5. ДАННИ ЗА ВЪЗЛИТЕ

Въз.	Коорд.	Коорд.	Код на закр.
J	X,r	Z,Φ°	CODE
-----	---R----	---R----	--D---
# 1	0	0	110
# 2	0.5	0	
# 3	1	0	010

* ТАБ.6. СЪСРЕДОТОЧЕНИ СИЛИ И МОМЕНТИ ВЪВ ВЪЗЛИТЕ (L)

Въз.	Px	Pz	My
J	Случ.1	Случ.1	Случ.1
-----	------	------	------
# 1			1
# 2	-1		0

КРАЙ НА ВХОДНИТЕ ДАННИ

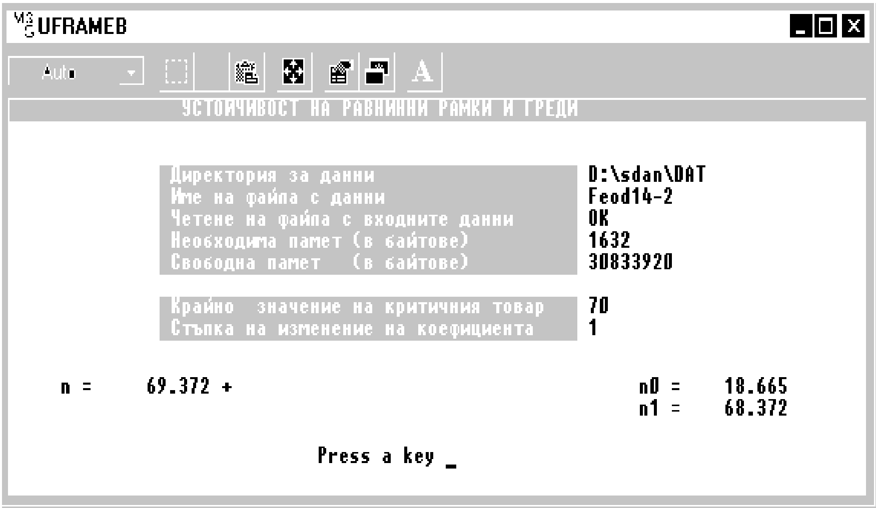
&

В диапазона 0-70 (със стъпка 1) са намерени следните два коефициента на сигурност: $n_0=18{,}665$, $n_1=68{,}372$ - фиг.18.15. Формите на огънатата ос на гредата при тези коефициенти са показани на фиг. 18.16. Виждаме, че това са формите за първата и втората критични сили. Самите критични сили ще бъдат съответно $P_1=18{,}67\ N$ и $P_2=68{,}37\ N$ (при коравина на огъване $EJy=1$). Практическо значение ще има само първата критична сила.

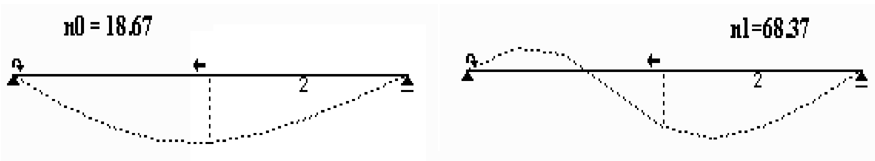
Тази задача е решена аналитично в [30], където за първата критична сила е получен резултата:

$$P_{кр} = \frac{18{,}7 EJ_y}{l^2}$$

При коравина на огъване $EJy=1$ и $l=1$, виждаме, че полученото числено решение съвпада с аналитичния резултат.

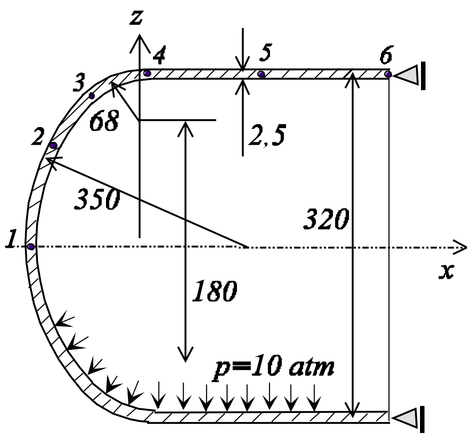


Фиг. 18.15. Диалогов прозорец при изчислението на устойчивост



Фиг. 18.16. Форми на огънатата ос на гредата при загуба на устойчивост

18.6. Статичен анализ на ососиметрични черупки



Фиг.18.17

С помощта на тази програма (фиг.18.1- раздел Статика) могат да се анализират ососиметрични черупки, съставени от следните видове елементи: цилиндрична, конична, сферична, тороидална черупки и кръгла плоча (диск). Използува се моментната теория на черупките, разгледана в раздел 13.2 за цилиндрична черупка и в 13.3 за кръгла плоча. (Пълно описание на теорията е дадено в [17]). Натоварването следва да е ососиметрично и може да бъде:

вътрешно и външно налягане, разпределени по кръг сили и моменти, температурно натоварване, натоварване от центробежни сили, предварителни премествания на закрепените възли и собственото тегло на черупката, ако същата е с вертикална ос на симетрия.

Пример 18.7. Да се определят деформациите и еквивалентните напрежения в цилиндричен съд със сферично дъно, като прехода между дъното и цилиндъра е с тороид – фиг.18.17, натоварен с вътрешно налягане *p=10 atm*.

Размерите на съда съвпадат с размерите на водосъдържателя, разгледан в пример 13.1, където на основание на безмоментната теория на черупките и трета якостна хипотеза при същото натоварване бяха определени еквивалентните напрежения в цилиндричната част (64 Mpa) и сферичната част (70 Mpa). Тук между цилиндричната част и сферичната част (между възли 3 и 4) съществува преход, оформен като тороид.

Входните данни за решаването на задачата са дадени по-долу. За неясните места се обърнете към описанието на променливите, дадени в приложението 18.8-а Обърнете внимание, че в мястото на срязване на съда е въведено такова закрепване, което позволява свободно разширение по радиуса без поява на огъващи моменти, като е въведено ограничение само по направление оста на съда, за да бъде поета равнодействуващата от налягането

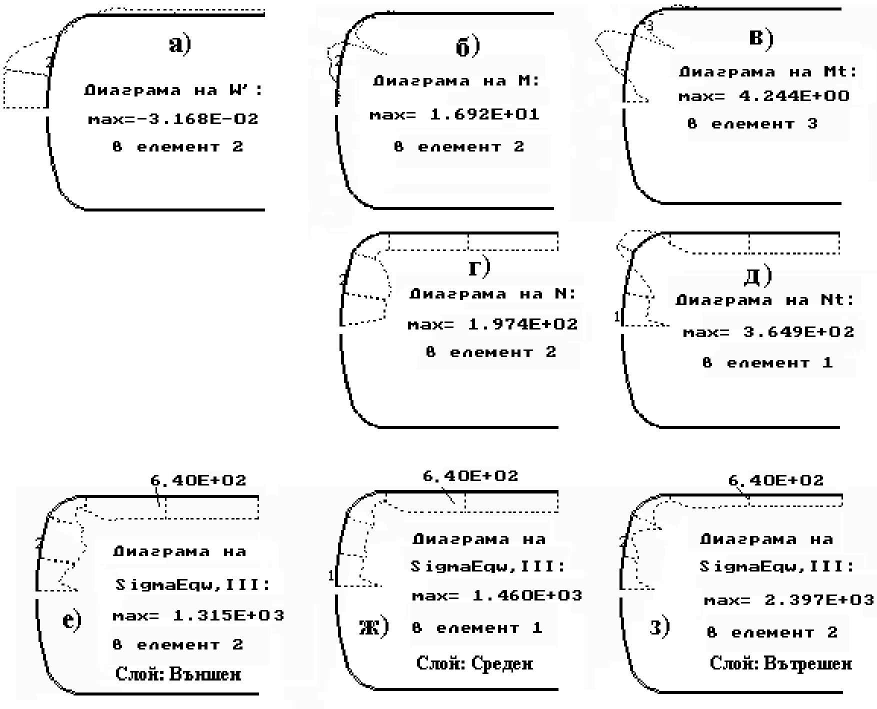
```
     ПРОГРАМЕН ПАКЕТ ЗА СТАТИЧНИ И ДИНАМИЧНИ АНАЛИЗИ - СДАН
         Проблем 2: Система ососиметрични черупки (Статика)
                           ВХОДНИ ДАННИ
 * ТАБ.1. КОНСТАНТИ (Z)
____________________________________________________________
#1   Име на задачата     [до 15 символа]      NAME =
#2   Дименсия за сили    [N,KN,MN,KG,T]       DIMF =KG
#3   Дименсия за дължина [M,CM,MM]            DIML =CM
#5   Общ брой на елементите     [1..50]       NEL  =5
#6   Общ брой на възлите        [2..51]       NOD  =6
#7   Общ брой на материалите    [1..50]       NMAT =1
#9   Общ брой на случ.на натов. [0..1]        NLD  =1
#10  Температурно натоварване   [0-не, 1-да]  ITEM =
#11  Собствено тегло            [0-не, 1-да]  IGRA =
#12  Обороти на въртене за минута             RPM  =
#13  Предварителни премествания [0-не, 1-да]  IDIS =
#16  Коорд. с-ма [0-правоъг., 1-цилиндрична]  SYST =

* ТАБ.2. ДАННИ ЗА МАТЕРИАЛИТЕ (Z)
__________________________________________________
 Ном.|Модул на|Коефиц.  |Относит.|Плътност|Коефиц. |
 мат.| еласт. |Поасон   |тегло   |        |темп.раз|
```

```
  I  |    E    |  NU     | GAMA    |  RO     | ALFA    |
-----|--------|--------|--------|--------|--------|
#  1  2.10e+06    0.295 7.80e-03 7.95e-06 1.13e-05 ACT3

* ТАБ.4. ДАННИ ЗА ЕЛЕМЕНТИТЕ
______________________________________________________________
 Елем|Междувъзлие    |Мат.|Тип |Дебел.|Дебел.|Радиус|R тор |Темп. |
  I  |  J1-J2        |MAT |TYPE|  h1  |  h2  |  R   |  Rt  |  T1  |
-----|----R---------|-L--|-D--|--L---|--L---|--Z---|--Z---|--L---||
#  1    1-2           1    S11  0.25    0.25   35
#  2    2-3                S11                 35
#  3    3-4                T11                6.8     9
#  4    4-5                L11
#  5    5-6                L11

* ТАБ.5. ДАННИ ЗА ВЪЗЛИТЕ
______________________________________________________
 Възл.| Коорд.  | Коорд.  |Код на|Прем.  |Прем.  |Завърт|
     |         |         |закр. |по X   |по Z   |ок. Y |
  J  |  X,r    |  Z,Φ°   | CODE |  U    |  W    |  Ty  |
-----|---R----|---R----|--D---|--Z---|--Z---|--Z---|
#  1    -6       0.7
#  2    -5.6     6
#  3    -4      12.8
#  4     2       16
#  5    15       16
#  6    30       16      100

* ТАБ.8. РАЗПРЕДЕЛЕНО НАЛЯГАНЕ ВЪРХУ ЕЛЕМЕНТИТЕ (L)
____________________
 Елем| qz1  | qz2  |
     |______|______|
  I  |Случ.1|Случ.1|
-----|------|------|
#  1   -10     -10
#  2
#  3
#  4
#  5
                  КРАЙ НА ВХОДНИТЕ ДАННИ
 &
```

Резултатите от изчислението на някои параметри са дадени на фиг. 18.18.

Получените резултати позволяват да се направят следните изводи:

В преходната част между цилиндъра и дъното, както и в самото дъно се появяват огъващи моменти (виж деформираното състояние – фиг.18.18-а и диаграмите на моментите – фиг.18.18-б, в), които пораждат допълнителни напрежения. Еквивалентното напрежение в цилиндричната част не се променя спрямо резултата от безмоментната теория (640 МРА), но в останалата част от съда напреженията се променят значително, като във вътрешния слой на дъното в мястото на прехода между тора и сферата еквивалентното напрежение (239 Мра) превишава повече от три пъти полученото напрежение по безмоментната теория (70 Мра).



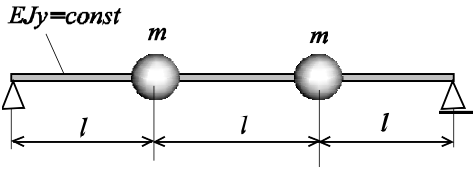
Фиг.18.18. Резултати от изчислението за пример 18.7

18.7. Динамичен анализ на греди и равнинни рамки

Програмата за динамичен анализ (фиг.18.1- раздел 'Динамика') е предназначена за определяне на собствените честоти и форми на греди и равнинни рамки, които се състоят от праволинейни гредови елементи (безмасови или с разпределена маса) и криволинейни елементи (безмасови). Могат да се определят също динамичните напрежения при принудени трептения (недемпфирани) при силово или кинематично въздействие в зададен честотен диапазон. Във възлите на гредата/рамката могат да се задават допълнителни съсредоточени маси, притежаващи маса и масов инерционен момент. Може да се отчете влиянието на срязващите сили, както и влиянието на инерцията на завъртване на напречното сечение. Алгоритъмът на решение се основава на пряко решение на системата диференциални уравнения, описан в [17].

Пример 18.8. Да се определят собствените честоти на греда, изпълнена от плътен прът с кръгло напречно сечение с диаметър *d= 3 cm* от Ст5, носеща две маси с големина *m=20 kg* – фиг. 18.19. Разстоянието *l=1 m*. Гредата да се счита за безмасова.

Файлът с данни е приведен по- долу. За да се счита, че гредата е безмасова, в табл.2 за материала на гредата задаваме за плътността някакво малко число, например 1.10^{-20}.



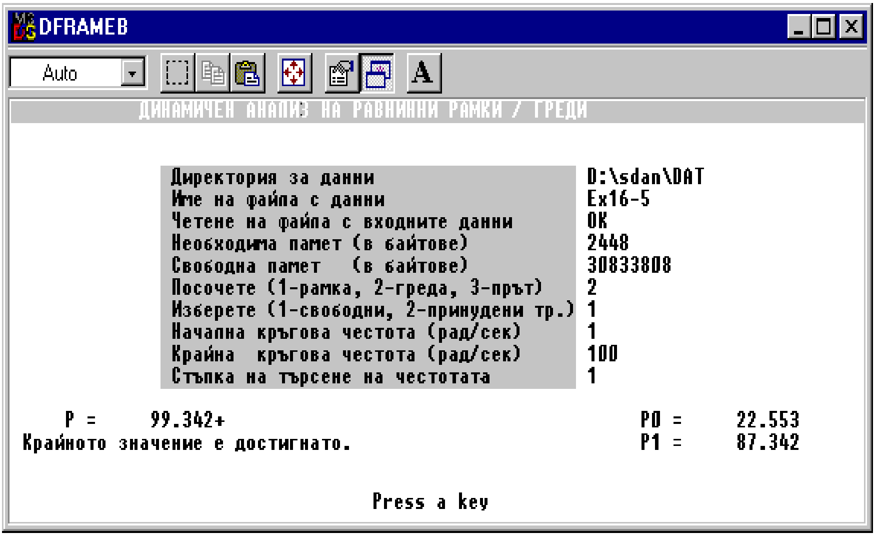
Фиг.18.19

```
     ПРОГРАМЕН ПАКЕТ ЗА СТАТИЧНИ И ДИНАМИЧНИ АНАЛИЗИ - СДАН
          Проблем 8: Равнинни рамки / Греди (Димамика)
                       ВХОДНИ ДАННИ
* ТАБ.1. КОНСТАНТИ (Z)
____________________________________________________________
#1   Име на задачата     [до 15 символа]      NAME =
#2   Димензия за сили    [N,KN,MN,KG,T]       DIMF =N
#3   Димензия за дължина [M,CM,MM]            DIML =M
#5   Общ брой на елементите     [1..400]      NEL  =3
#6   Общ брой на възлите        [2..400]      NOD  =4
#7   Общ брой на материалите    [1..50]       NMAT =1
#8   Общ брой на профилите      [1..50]       NPRO =1
#9   Общ брой на случ.на натов. [0..1]        NLD  =1
#13  Предварителни премествания [0-не, 1-да]  IDIS =
#16  Коорд. с-ма [0-правоъг., 1-цилиндрична]  SYST =
#17  Срязващи сили             [0-не, 1-да] Kshear =
#18  Инерция на завъртване     [0-не, 1-да] Kinert =

* ТАБ.2. ДАННИ ЗА МАТЕРИАЛИТЕ (Z)
__________________________________________________
 Ном.|Модул на|Коефиц.  |Относит.|Плътност|Коефиц. |
 мат.| еласт. |Поасон   |тегло   |        |темп.раз|
  I  |   E    |  NU     | GAMA   |  RO    | ALFA   |
-----|--------|---------|--------|--------|--------|
#  1  2.13e+11    0.308 7.80e+04    1e-20 1.18e-05 АСТ5

* ТАБ.3. ДАННИ ЗА ПРОФИЛИТЕ (Z)
____________________________________
 Ном.|    F    |   Iy'   |   Wy'  |IN |
-----|---------|---------|--------|---|
#  1  7.07e-04 3.98e-08 2.65e-06   1  O-Profile D=3.000e-02
```

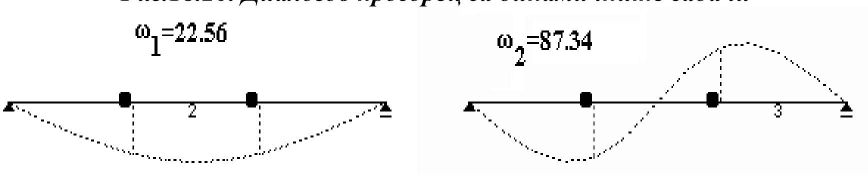
```
* ТАБ.4. ДАННИ ЗА ЕЛЕМЕНТИТЕ
________________________________________________________________
 Елем|Междувъзлие    |Мат.|Проф|Тип |Радиус| Маса |Мас.мо|
  I  | J1-J2         |MAT |PROF|TYPE|  R   |  M   |  I   |
-----|---R-----------|-L--|--L-|--D-|--Z---|--Z---|--Z---|
#  1    1-2           1    1               20
#  2    2-3                                20
#  3    3-4

* ТАБ.5. ДАННИ ЗА ВЪЗЛИТЕ
__________________________________________________________
 Въз.| Коорд.  | Коорд.  |Код на|Прем.  |Прем.  |Завърт|
     |         |         |закр. |по X   |по Z   |ок. Y |
  J  |  X,r    |  Z,Φ°   | CODE |  U    |  W    |  Ty  |
-----|---R-----|---R-----|--D---|--Z----|--Z----|--Z---|
#  1      0         0      110
#  2      1         0
#  3      2         0
#  4      3         0      010

* ТАБ.6. СЪСРЕДОТОЧЕНИ СИЛИ И МОМЕНТИ ВЪВ ВЪЗЛИТЕ (L)
______________________________
 Въз.|  Px   |  Pz   |  My   |
     |_______|_______|_______|
  J  |Случ.1|Случ.1|Случ.1|
-----|------|------|------|
#1                    1

                  КРАЙ НА ВХОДНИТЕ ДАННИ
 &
```

След стартиране на изчисленията, се появява диалоговия прозорец от фиг.18.20, в който следва да се зададе типа на изчисленията (1- свободни трептения, 2- принудени трептения), началото на диапазона на търсене на честотата (за примера зададено числото 0) , края на диапазона (зададено числото 100) и стъпка на търсене на честотата (зададено числото 1). В същия прозорец се появяват и намерените собствени кръгови честоти (rad/s). На фиг.18.21 са показани собствените форми на трептене, съответстващи на намерените първа и втора собствена честота.

Тази задача беше решена аналитично в раздел 16.3 – пример 16.5. Ако в теоретичните резултати за аналитично определените собствени честоти заместим зададените данни: за модула $E=2,13.10^{11}\ Pa$, инерционния момент $Jy=3,98.10^{-8}$, масата $m=20\ kg$ и дължината $l=1\ m$, ще получим същия резултат



Фиг.18.20. Диалогов прозорец за динамичните задачи



Фиг.18.21. Първа и втора форми на трептене за пример 18.8

18.8. ПРИЛОЖЕНИЯ

А) Описание на променливите и идентификаторите в таблиците за данни.

Този текст се изобразява при работа с вградения текстов редактор с клавиша **F1**. Тук са описани само променливите за учебната версия на пакета СДАН.

Глобална координатна система XYZ

XYZ е глобална произволно избрана правоъгълна координатна система, в която се описват координатите на възлите. Оста Z е винаги вертикална (+Z е нагоре). Рамките лежат в равнината XZ. За черупките ос X е ос на ротация.

Локална координатна система X'Y'Z'

Всеки елемент има своя локална координатна система X'Y'Z' с начало в първия възел на елемента. За греди ос X' съвпада с оста на елемента, а осите Y' и Z' са главните инерционни оси на напречното сечение на елемента. Ос Z' на всеки елемент лежи в равнината XZ на глобалната координатна система.

ИЗМЕРИТЕЛНА СИСТЕМА

Входните данни се състоят от цели числа, реални числа и символи. **Данните следва да се въвеждат в избраната от потребителя измерителна система !**

За реалните числа могат да се използуват два начина на въвеждане: с фиксирана запетая или в експоненциална форма. Например 2100000 (фиксирана запетая) е еквивалентно на 2.1E6. Също така -0.000078 = -7.8E-5.

ВАЖНИ ПРАВИЛА

1. Всяка линия, съдържаща данни, трябва да започва със символа #. Линии без този символ в началото се приемат за коментарни.

2. Символите *** : = &** , както и номерата на таблиците са управляващи. Изтриването им от таблиците е недопустимо.

3. Данните за всяка променлива заемат не повече от отредените им полета. Записването на символ в колонките между променливите е синтаксична грешка.

КОНСТАНТИ

След знака за равенство се въвеждат константите за конкретната задача, при което е необходимо да се спазват границите, указани в квадратните скобки за всяка константа.

МАТЕРИАЛИ

I-номер на материала (условен номер от 1 до общия брой на използуваните материали).

E - Модул на еластичност от първи род. Задава се винаги.

NU - Коефициент на Поасон. Задава се винаги.

GAMA-Относително тегло на материала. Задава се, ако се отчита собственото тегло.

RO - Плътност на материала. Задава се, ако се отчитат центробежните сили и при динамичните задачи.

ALFA -Коефициент на температурно разширение на материала. Задава се, ако се отчита температурното натоварване.

ПРОФИЛИ

I - Номер на профила (условен номер от 1 до общия брой на използуваните профили).

F - Площ на напречното сечение на гредата.

Iy' - Инерционен момент на напречното сечение около главната инерционна ос Y'.

Wy' - Съпротивителен момент на напречното сечение около ос Y'.

IN – идентификационен номер на профила (число от 1 до 10 според фиг.18.9)

ЕЛЕМЕНТИ

I - номер на елемента

J1 - J2 - начален и краен възел на елемента.

Забележка: За греди/пръти с права ос началният възел може да бъде единият от двата възела, между които е разположен елемента. За елементи с крива ос (криви греди, сферична и тороидална черупка) движението от началния към крайния възел трябва да бъде по часовата стрелка. За конична черупка възела с по-малък диаметър е първия възел. За кръгла плоча възела с по-малък радиус е първия възел.

MAT - номер на материала (от таблицата за материали), от който е изработен елемента.

PROF - номер на профила (от таблицата за профили), от който е изработен елемента.

TYPE - тип на елемента. Представлява код от три сиmвола. Първият символ е буква - (съкратен код на елемента). Елементите са:

B - греда с праволинейна ос.

R - греда с ос по дъга от окръжност.

E - права греда на еластична основа.

D – права греда с разпределена маса

L – цилиндрична черупка.

S – сферична черупка.

T – тороидална черупка.

C – конична черупка.

P – кръгла плоча (диск).

Следващите два символа са 0 или 1, определящи наличието на стави в двата края на елемента (0-символ за става, 1-символ за твърда връзка).

Пример: **B10** е права греда, кораво хваната в началото (възел J1) и със става в края на гредата (възел J2).

Забележка: Незададен тип на елемент при греди и рамки се приема за **B11**, а при черупки - **L11**.

При задачите от статика на греди и рамки е допустима комбинация от елементи **B, R, E**. При задачите от статика на ососиметрични черупки е допустима комбинация от елементи **L, S, C, T, P**. При задачите от динамика могат да се комбинират елементи **B, R, D**. При задачите от устойчивост участвува само елементът от тип **B**.

R - радиус на греда с криволинейна ос (радиус на сфера или радиус на балона на тор).

Rt – радиус на кривина на тор.

C - коефициент на еластичната основа. Задава се само за елементи от тип **E**.

H - височина на напречното сечение на гредата, измерена по ос Z'. Задава се, ако се отчита температурно натоварване.

h1 – дебелина на черупката в началото на елемента.

h2 – дебелина на черупката в края на елемента (между началото и края на елемента се предполага линейно изменение на дебелината)

T1 - температура от страната на елемента с положителна локална ос Z'.

T2 - температура от страната на елемента с отрицателна локална ос Z'. Между двата крайни слоя се предполага линейно изменение на температурата.

N - натискова сила в елемента (за задачите от устойчивост)

M – съсредоточена маса в краищата на елемента (при динамичните анализи). Ако се зададе отрицателно число, счита се, че масата е в началото на елемента, а при положително число се счита, че масата е в края на елемента.

Iм - масов инерционен момент на съсредоточената маса (при динамичните анализи). Ако момента е отрицателен, счита се, че масата е в е в началото на елемента, ако е положителен – в края на елемента.

ВЪЗЛИ

J - номер на възела

X - координата X на възела в глобалната координатна система.

Z - координата Z на възела в глобалната координатна система.

Когато се използува цилиндрична координатна система, вместо X се задава координатата **r** (радиус, разстояние на точката от координатното начало), а вместо Z се задава ъгълът **Ф** (в градуси) между ос X и радиуса **r**. Активирането на цилиндрична координатна система става с командата **#CIL**, а дезактивирането (задължително) с командата **#ORT**.

Забележка: Ако при интегриране на черупкови елементи от тип конус (с връх), кръгла плоча (без централен отвор) и сфера се получи съобщение **‘*Невъзможно е да се постигне необходимата точност на интегриране*’,** началото на съответния елемент да не започва от ос X (получава се делене на малко число и се губи точност), а да се зададе изкуствено малък отвор (спрямо размерите на черупката). Това става с корекция на координатата Z на първия възел.

CODE - код на закрепване на възела. Задава се само за закрепените възли.

Кодът на възела е комбинация от 0 и 1, като нулата показва, че възелът е освободен в дадено направление, а единицата - възелът е фиксиран в дадено направление.

Направленията съответстват на степените на свобода възела, като техния брой и последователност са дадени в същата таблица след CODE.

Примери за равнинна рамка: Код **111** означава запънат възел. Код **110** означава възел, неподвижен по ос X и ос Z. **Възел с незададен код се счита свободен.**

Внимание! Закрепването трябва да осигурява **кинематична неизменяемост** на конструкцията, т.е. движението и като твърдо тяло е недопустимо. Изключение от това правило имат само задачите от трептения.

U, W - Предварителни премествания на възела по осите X и Z на глобалната координатна система. Задават се само за закрепените възли.

Ty - Предварително завъртване на възела (като твърдо тяло) около ос Y на глобалната координатна система. Задава се (в радиани) само за закрепените възли.

НАТОВАРВАНЕ

СЪСРЕДОТОЧЕНИ СИЛИ И МОМЕНТИ

Px, Pz - съсредоточени сили във възлите. Задават се само за натоварените възли. Положителните посоки на силите съвпадат с положителните посоки на осите X, Z на глобалната координатна система.

My - съсредоточен момент във възлите. Задава се само за натоварените възли. Положителните посоки на моментите са когато въртят около ос Y на глобалната координатна система в посока, обратна на движението на часовата стрелка.

РАЗПРЕДЕЛЕНИ ТОВАРИ

qX1, qX2, qZ1, qZ2 - разпределени товари върху елементите съответно в началото и края на елемента, предполагайки, че между двата края разпределеният товар се изменя по линеен закон. Положителните посоки се определят спрямо оста Z на глобалната координатна система (за черупки – локалната координатна система). Задават се само за натоварените елементи.

Б) Графичен редактор.

Основният прозорец на графичния редактор е показан на фиг.18.12. За помощ използувайте контекстно чувствителния ‘Help’ чрез натискане на бутона , след което натиснете интересуващият ви бутон. За да видите последователността на работа, стартирайте вградения клип чрез бутона .

Приложение 1. Осреднени физични характеристики и цени на някои материали

(по данни на [8],[11],[19],[35] и търговски фирми)

Материал	Цена (ориент.) [$]	Относ. тегло **γ** kN/m^3	Модул на елас-тичност **E** [Gpa]	Коеф. на Поасон **μ** [-]	Коефиц. на темп. разшир. **α**.10^{-6} 1/deg
1	2	3	4	5	6
Стомани нисковъглеродни	0,40 $/kg	78	208	0,3	11,1
Стомани въглеродни качествени	1,00 $/kg	78,1	210	0,28	11,5
Стомани легирани (манган, силиций)	4,00 $/kg	77,9	212	0,26	11,7
Стомани легирани (хром, никел)	7,00 $/kg	78,4	216	0,31	12,2
Стомани – корозо и топлоустойчиви	8,00 $/kg	78,2	211	0,27	12
Чугуни сиви	0,40 $/kg	71,4	120	0,25	10,1
Чугуни ковки		73,1	168	0,26	10,3
Сплави алуминиеви	3,50 $/kg	26,2	70	0,34	21,9
Сплави медни (месинги)	3,00 $/kg	85,3	107	0,38	18.3
Сплави медни (бронзи)	4,50 $/kg	85,4	108	0, 34	17,5
Сплави титанови	16 $/kg	46,5	100	0,36	9,4
Въжета стоманени	1,7 $/kg	50	160	-	12
Бетони обикновени	35 $/$m^3$	23	19	0,2	12
Тухли		-	28	-	5,5
Бор-надлъжно	150 $/$m^3$	5,2	12,4	0,49	3,7
Бук-надлъжно	300 $/$m^3$	6,8	13,8	0,48	3,5
Дъб-надлъжно	320 $/$m^3$	7,6	14	0,43	4,9
Стъкло	1,35 $/kg	24	63	0,23	8,8

1	2	3	4	5	6
Каучук	1,50 $/kg	9,1	0,0078	0,47	230
Гетинакс		13,5	18	-	20
Текстолит	9,00 $/kg	13,8	10	-	35
Полиетилен	1,00 $/kg	9,5	1	0,42	225
Полиамид	4,30 $/kg	11,4	2	0,42	103
1	2	3	4	5	6
Полистирол	1,60 $/kg	11	2,5	-	110
Полиуретан	4,00 $/kg	12	0,025	0,495	121
Полипропилен	1,10 $/kg	9,0	1,2	0.42	86
Поликарбонат	4,90 $/kg	12	2,7	0,42	70
Поливинилхлори д	1,50 $/kg	13,7	1,5	0,42	75
Корк	9,00 $/kg	1,8	0,032	0,25	180
Лед	0,23 $/kg	9,2	9,1	0,28	55

Приложение 2. Механични характеристики на някои материали

***(** по данни на [8],[11],[19] и [35])*

Материал	**Граница на пров-лачване** **σ_s** [Mpa]	Граница на разру-шение Опън/ Натиск **σ_B** [MPa]	Допуст. напреж на опън /натиск **$[\sigma]_{оп}$ / $[\sigma]_н$** [MPa]	Грани-ца на якостна умора **$[\sigma]_{-1}$** [MPa]	Жила-вост при разру-шение **$K_{1,C}$** MPa√m
1	2	3	4	5	6
Стомани нисковъглеродни	195-340	320-720 -	140-160 140-160	140-300	100-200
Стомани въглеродни качествени	170-1000	260-1080 -	60-250 60-250	120-460	30-150
Стомани легирани (манган, силиций)	250-890	400-1040 -	100-400 100-400	170-480	30-150
Стомани легирани (хром, никел)	500-1240	620-1320 -	150-500 150-500	180-540	30-150
Стомани – корозо и топлоустойчиви	200-955	310-1150 -	80-450 80-450	215-475	30-150
Чугуни сиви	-	140-180 600-1000	28-80 120-250	30-105	6-20

1	2	3	4	5	6
Чугуни ковки	-	210-250 до 1400	40-100 140-200	70-156	
Сплави алуминиеви	50-410	130-490 -	80-120 80-120	50-165	22-45
Сплави медни (месинги)	91-450	200-700 -	70-140 70-140	120-160	90-100
Сплави медни (бронзи)	50-500	200-800 -	60-120 60-120	130-280	80-90
1	2	3	4	5	6
Сплави титанови	470-1100	650-1200 -	200-480 200-480	260-500	30-120
Въжета стоманени		900-2000			
Бетони обикновени	-	- 5-48	0,6-2,45 4,5-33		0,2-0,4
Почва глинеста	-	- 0,16	- 0,16		
Тухли	-	- -	- 2-3,5		
Бор-надлъжно	61	115 -	7-10 10-12		8-13
Бук-надлъжно	70	130 -	9-13 13-15		
Дъб-надлъжно	74	130 -	9-13 13-15		
Стъкло (натиск)	- 1500	- 2000	- 2,5		0,3-0,7
Каучук	-	16-38 -			
Гетинакс	-	60-100 -	50-70 50-70	35	
Текстолит	70-80	110-250 -	30-40 30-40	20	
Полиетилен	25	18-35 -			3,5
Полиамид	40	56-65 -			3
Полистирол	32	45-65 -			
Полиуретан	30	40			0,3

1	2	3	4	5	6
Полипропилен	35	45 -			3
Поликарбонат	70	85-90 -			2,6
Поливинилхлорид	53	70 -			0,5
Корк	1,4	-			0,1
Лед	88	-			0,1

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бацинов Ц.,** Съпротивление на материалите. ВМЕИ-Варна, 1990.
2. **Беляев Н. М.,** Сопротивление материалов. М. Наука.1976.
3. **Биргер И. А. Пановко Я. Г.,** Прочность, Устойчивость, Колебания. Справочник в трех томах. М. Машиностроение. 1968.
4. **Върбанов Хр.,** Устойчивост и динамика на еластични системи. С. Техника.1975.
5. **Бояршинов С.,** Основы строительной механики машин. М. Машиностроение. 1973.
6. **Гордън Дж.,** Новата наука за материалите.С. Техника. 1975.
7. **Дарков А.В., Шпиро Г.С.,** Сопротивление материалов. М. ВШ. 1975.
8. **Димов Д., Христов Д., Веселинова В., Санкев З.,** Таблици и формули по Съпротивление на материалите. С. Техника. 1992.
9. **Джонов Цв.,** Съпротивление на материалите. ТУ-Габрово. 1999.
10. **Кисляков С.,** Съпротивление на материалите. С. Техника. 1975.
11. **Кисьов И.,** Съпротивление на материалите. С. Техника. 1970.
12. **Кисьов И.,** Таблици по Съпротивление на материалите. С. Техника. 1965.
13. **Кюлджиев С.,** Съпротивление на материалите.С. ВИ. 1983.
14. **Лазов Л.,** Съпротивление на материалите. С.Техника.1992.
15. **Мандичев Г.,** Съпротивление на материалите. С.Техника. 1996.
16. **Милков В., Бацинов Ц.,** Приложение на ЕИМ в Съпротивление на материалите. ВМЕИ-Варна. 1981, 1986.
17. **Милков В.,** Съвременни числени методи за анализ на конструкции. Колор принт-Варна. 1999.

18. **Писаренко Г. С. и др.,** Съпротивление материалов. Киев. ВШ. 1979.
19. **Писаренко Г. С. и др.,** Справочник по Съпротивлению материалов. Киев. НД. 1975.
20. **Попов К.,** Съпротивление на материалите. С. ХТИ. 1985.
21. **Смирнов А. Ф.,** Сопротивление материалов. М. ВШ. 1975.
22. **Снитко Н. К.,** Сопротивление материалов. Л. ЛГУ. 1975.
23. **Стойчев Ю., Куюмджиев Хр., Николов Й., Василева М.,** Съпротивление на материалите. ТУ-Русе. 1982.
24. **Танков Н., Друмев В.,** Съпротивление на материалите в примери и задачи. С. Техника. 1979.
25. **Татур Г. К.,** Общий курс Сопротивления материалов. Минск, ВШ. 1974.
26. **Тимошенко С. П.,** Сопротивление материалов. Т.1. Л. 1932.
27. **Тимошенко С. П.,** Механика материалов. М.Мир.1976.
28. **Тимошенко С. П.,** История науки о Сопротивлении материалов. М. 1957.
29. **Уманский А. А.,** Сборник задач по Сопротивлению материалов. М. Наука. 1964.
30. **Феодосиев В. И.,** Съпротивление на материалите. С. Техника. 1965.
31. **Феодосиев В. И.,** Десять лекций-бесед по Съпротивлению материалов. М. Наука. 1975.
32. **Феодосиев В. И.,** Избрнные задачи и вопросы по Сопротивлению материалов. М Наука 1973.
33. **Филин А.П.,** Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т.1. М. Наука. 1975.
34. **Benham P., Crawford R., Armstrong C.,** Mechanics of Engineering Materials. Longman Singapore Pubshers Ltd, 1996.
35. **Rovlance D.,** Mechanics of materials. Jhon Wiley&Sons, Inc. 1996.
36. **Zienkiewicz O.,** The Finite Element Method. 3 edition. McGraw Hill, London. 1982.

ISBN 954-20-0166-5

СЪПРОТИВЛЕНИЕ НА МАТЕРИАЛИТЕ

Второ издание

Автор: Върбан Димитров Милков

Поръчка /2001
Формат 60 х 84/16
Печатни коли 25,25

Печатно-офсетна база при ТУ-Варна
Варна 9010, ул.Студентска, N1.